$\boxed{\text{I}}$ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=\frac{16}{5},\ a_2=\frac{23}{5},\ a_{n+2}=\frac{1}{6}(a_{n+1}+a_n+8)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，適当な正の実数 α を用いて数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_n-\alpha$ とすると $b_{n+2}=\frac{1}{6}(b_{n+1}+b_n)$ とできる。さらに，適当な正の実数 β，γ を用いて $c_n=b_{n+1}+\beta b_n$，$d_n=b_{n+1}-\gamma b_n$ ($n=1,\ 2,\ \cdots$) とおくと，$c_{n+1}=\gamma c_n$，$d_{n+1}=-\beta d_n$ とできる。

ここで，$\alpha=\boxed{\text{ア}}$，$\beta=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\gamma=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

したがって，$c_n=\gamma^{n-1}\boxed{\text{カ}}$，$d_n=(-\beta)^{n-1}\boxed{\text{キ}}$ である。

これらを用いて数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=\gamma^{n-1}\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}-(-\beta)^{n-1}\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}+\alpha$$

と表せる。

(2) 放物線 C : $y=\dfrac{x^2}{2}-x$ と直線 l : $y=x$ は原点 O と点 A$(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{ア}})$ で交わり，線分 OA と放物線 C で囲まれる領域 R の面積は $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる。また，放物線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}-a\right)\left(0\leqq a\leqq\boxed{\text{ア}}\right)$ から直線 l に引いた垂線との交点を Q とすると，点 Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^2,\ \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^2\right)$ で与えられ，

線分 PQ の長さは $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,a\left(1-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a\right)$ となる。

これらより領域 R を直線 l の周りに回転して得られる回転体の体積は

$\dfrac{\boxed{\text{コサ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ となる。

(3) 複素数 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ に対して，$|z_1|=1$ かつ3点 z，zz_1，$zz_1{}^2$ が複素平面上で正三角形の3頂点となるのは，

$z_1=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}i$ の場合である。

つぎに，3点 z，zz_2，$z\overline{z_2}$ が複素平面上で正三角形の3頂点となる場合を考える。z_2 の実部が $-\sqrt{3}-1$ の場合には

$z_2=-\sqrt{3}-1\pm\dfrac{\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}i$ である。さらに，

$|z_3|=|z_2|$ かつ z，zz_3，$z\overline{z_3}$ が正三角形の3頂点となるのは，z_2 の他に

$$z_3=\frac{\boxed{\text{コ}}+\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}\pm\frac{\boxed{\text{セ}}+\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}i$$

がある。

ただし，複素数 x に対して，$\overline{x}$ は x の共役複素数とする。

(4) 関数 $y=\log_e x$ のグラフ上に点 A と関数 $y=e^x$ のグラフ上に点 B をとる。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ をそれぞれ長さ1で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と同じ向きのベクトルとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ の内積の最大値を m とすると，

$$\log_e m=\boxed{\text{ア}}+\log_e\boxed{\text{イ}}-\log_e\left(e^{\boxed{\text{ウ}}}+\boxed{\text{エ}}\right)$$

である。

(解説)

(1) $b_n=a_n-\alpha$ とおくと $a_n=b_n+\alpha$ だから，$a_{n+2}=\frac{1}{6}(a_{n+1}+a_n+8)$ に代入すると

$$b_{n+2}+\alpha=\frac{1}{6}\{(b_{n+1}+\alpha)+(b_n+\alpha)+8\}=\frac{1}{6}(b_{n+1}+b_n)+\frac{1}{3}\alpha+\frac{4}{3}$$

これが $b_{n+2}=\frac{1}{6}(b_{n+1}+b_n)$ となるので　$\alpha=\frac{1}{3}\alpha+\frac{4}{3}$　$\therefore\ \alpha={}^{\text{ア}}2$

$$b_{n+2}=\frac{1}{6}(b_{n+1}+b_n)\ \text{は}\ \begin{cases} b_{n+2}+\frac{1}{3}b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_{n+1}+\frac{1}{3}b_n\right) \\ b_{n+2}-\frac{1}{2}b_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n\right)\end{cases}\ \text{と2通りに変形できる}$$

から　$\beta=\dfrac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}3}$，$\gamma=\dfrac{{}^{\text{エ}}1}{{}^{\text{オ}}2}$

ここで，$b_1=a_1-2=\frac{6}{5}$，$b_2=a_2-2=\frac{13}{5}$ であるから

$$c_1=b_2+\frac{1}{3}b_1=3,\ d_1=b_2-\frac{1}{2}b_1=2$$

$\therefore\ c_n=\gamma^{n-1}c_1=\gamma^{n-1}\cdot{}^{\text{カ}}3$，$d_n=(-\beta)^{n-1}\cdot{}^{\text{キ}}2$

$b_{n+1}+\frac{1}{3}b_n=\gamma^{n-1}\cdot 3$，$b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n=(-\beta)^{n-1}\cdot 2$ の辺々を引くと

$$\frac{5}{6}b_n=\gamma^{n-1}\cdot 3-(-\beta)^{n-1}\cdot 2$$

$b_n=a_n-\alpha$ より　$a_n=\gamma^{n-1}\cdot\dfrac{{}^{\text{クケ}}18}{{}^{\text{コ}}5}-(-\beta)^{n-1}\cdot\dfrac{{}^{\text{サシ}}12}{{}^{\text{ス}}5}+\alpha$

(2) C と l を連立すると　$\dfrac{x^2}{2}-x=x$　$\therefore\ x=0,\ 4$

点 A は原点以外の交点だから　$({}^{\text{ア}}4,\ {}^{\text{ア}}4)$

OA と C で囲まれる面積は

$$\int_0^4\left\{x-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right\}dx=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(4-0)^3=\frac{{}^{\text{イウ}}16}{{}^{\text{エ}}3}$$

点 P から l に引いた垂線との交点は，l に垂直で P を通る直線 $y=-x+\dfrac{a^2}{2}$ と l とを連立させて　$-x+\dfrac{a^2}{2}=x$　$\therefore\ x=\dfrac{a^2}{4}$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}4}a^2,\ \dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}4}a^2\right)$

線分 PQ の長さは，点と直線の距離を考えると，$0\leqq a\leqq 4$ より

$$\mathrm{PQ}=\frac{\left|1\cdot a-1\cdot\left(\frac{a^2}{2}-a\right)\right|}{\sqrt{1^1+1^2}}=\sqrt{{}^{\text{キ}}2}\,a\left(1-\frac{{}^{\text{ク}}1}{{}^{\text{ケ}}4}a\right)$$

また，OQ の長さを X とすると，P から $x+y=0$ に下ろした垂線の長さと等しいから

$$X=\mathrm{OQ}=\frac{\left|1\cdot a+1\cdot\left(\frac{a^2}{2}-a\right)\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\qquad\therefore\ dX=\frac{a}{\sqrt{2}}da$$

よって，求める回転体の体積は

$$\int_0^{4\sqrt{2}}\pi\mathrm{PQ}^2dX=\pi\int_0^4 2a^2\left(1-\frac{1}{4}a\right)^2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}da=\frac{{}^{\text{コサ}}64\sqrt{{}^{\text{シ}}2}}{{}^{\text{スセ}}15}\pi$$

(3) $zz_1{}^2-z=(zz_1-z)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ より　$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$zz_1-z=(zz_1{}^2-z)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ より　$z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore\ z_1=\dfrac{{}^{\text{アイ}}-1}{{}^{\text{ウ}}2}\pm\dfrac{\sqrt{{}^{\text{エ}}3}}{{}^{\text{オ}}2}i$

以下，正三角形の1つの場合について考える。

$$z\overline{z_2}-z=(zz_2-z)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$z_2=-\sqrt{3}-1+wi$ を代入して整理すると

$$-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}\,y+(-3y+2\sqrt{3}+3)i=0\qquad\therefore\ w=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

よって　$z_2=-\sqrt{3}-1\pm\dfrac{{}^{\text{カ}}3+{}^{\text{キ}}2\sqrt{{}^{\text{ク}}3}}{{}^{\text{ケ}}3}i$

$$z\overline{z_3}-z=(zz_3-z)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$z_3=x+yi$ を代入して整理すると

$$x-1+\sqrt{3}\,y+(-3y+\sqrt{3}-\sqrt{3}\,x)i=0\qquad\therefore\ x+\sqrt{3}\,y-1=0\ \cdots\cdots①$$

$|z_2|^2=\dfrac{19+10\sqrt{3}}{3}$ より　$x^2+y^2=\dfrac{19+10\sqrt{3}}{3}\ \cdots\cdots②$

①②を連立して x，y の数値を求めることにより

$$z_3=\frac{{}^{\text{コ}}3+{}^{\text{サ}}2\sqrt{{}^{\text{シ}}3}}{{}^{\text{ス}}2}\pm\frac{{}^{\text{セ}}6+\sqrt{{}^{\text{ソ}}3}}{{}^{\text{タ}}6}i$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ のなす角を θ とおくと，最大値を考えるから $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}||\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|\cos\theta=\cos\theta$$

図形的に考えると，結局，$y=\log_e x$ の接線が原点を通るときの接点を A とし，$y=e^x$ の接線が原点を通るときの接点を B とすれば，内積は最大となる．各々の接線は $y=\frac{1}{e}x$，$y=ex$ だから，その2直線のなす角を $\theta'\left(0<\theta'<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta'=\frac{e-\frac{1}{e}}{1+e\cdot\frac{1}{e}}=\frac{e^2-1}{2e}\qquad \therefore \cos^2\theta'=\frac{1}{1+\tan^2\theta'}=\frac{4e^2}{(e^2+1)^2}$$

よって $\cos\theta'=\dfrac{2e}{e^2+1}$ となり，これが求める m に他ならないから

$$\log_e m=\log_e\cos\theta'={}^{ア}1+\log_e{}^{イ}2-\log_e({e}^{{}^{ウ}2}+{}^{エ}1)$$

II $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

点 R を中心とする半径 5 の円および長半径（長軸の長さの半分）が 5，短半径（短軸の長さの半分）が 3 の楕円がある（図 I）。円上の点 P′，Q′ から楕円の長軸へ引いた垂線と楕円との交点をそれぞれ点 P，Q とする。∠P′RQ′$=\alpha$ とすると，

図 I の斜線部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\alpha$ で与えられる。これをふまえて以下の問題を考えよう。

いま，一辺の長さ 1 の正方形 ABCD に，なめらかで伸びない糸で作られた長さ 5 の輪がかけられている。糸を張りつめた状態で正方形の周りを一周させたときの頂点が動く軌跡は図 II のようになる。この軌跡上に点 E，F，G を図 II のようにとると，弧 EF は点 A，D を焦点とし，長半径が $\boxed{\text{エ}}$，短半径が

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ の楕円の一部であり，弧FGは点B，Dを焦点とし，長半径が

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，短半径が $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ の楕円の一部である。ここで辺 AD の中点を M とすると，弧 EF と線分 ME，MF で囲まれる領域の面積は

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シス}}}\pi$ となる。

つぎに，線分 AC，BD の交点を O とし，O を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ の円 S を考える。さらに，円 S 上の点で線分 BD に引いた垂線が点 F を通る点を F′ とする（図III）。このとき AF$=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ なので，∠F′OA$=\beta$ とすると，

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ となる。

弧 FG と線分 OF，OG で囲まれる領域の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}\beta$ となる。

以上より，頂点の軌跡によって囲まれる部分の面積は

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}\pi+\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}\beta+\boxed{\text{ノ}}$

となることがわかる。

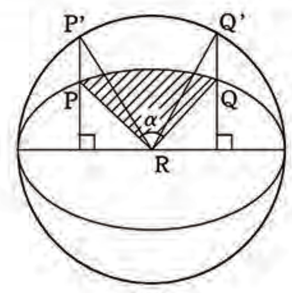


図 I

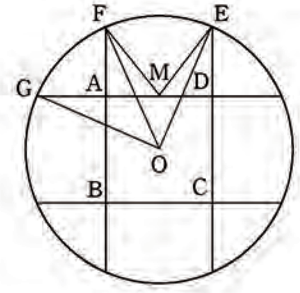
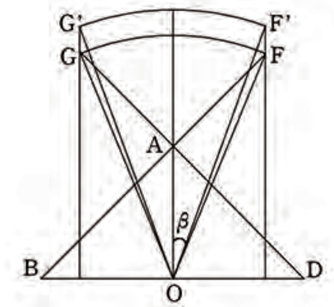


図 II



図III

（解説）

図 I の斜線部分の面積は，扇形 RP′Q′ の面積の $\dfrac{3}{5}$ 倍であるから，

$$\frac{1}{2}\cdot5^2\alpha\cdot\frac{3}{5}=\frac{{}^{アイ}15}{{}^{ウ}2}\alpha$$

弧 EF を弧の一部とする楕円は，長軸の長さ $a=5-3=2$，焦点間距離 AD$=1$ である。

よって，長半径 $\dfrac{a}{2}={}^{エ}1$，短半径 $\dfrac{\sqrt{a^2-\mathrm{AD}^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{{}^{オ}3}}{{}^{カ}2}$ となる。

弧 FG を弧の一部とする楕円は，長軸の長さ $b=5-2=3$，焦点間距離 BD$=\sqrt{2}$ である。

よって，長半径 $\dfrac{b}{2}=\dfrac{{}^{キ}3}{{}^{ク}2}$，短半径 $\dfrac{\sqrt{b^2-\mathrm{BD}^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{{}^{ケ}7}}{{}^{コ}2}$ となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{DE'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF''}}$ となるように，2 点 E′，F″ をとる。

AF$=x$ とおくと，FD$=\sqrt{x^2+1}$ であり，AF+FD$=2$ であるから，

$$x+\sqrt{x^2+1}=2 \iff \sqrt{x^2+1}=2-x$$

両辺を 2 乗して，

$$x^2+1=4-4x+x^2 \iff \mathrm{AF}=x=\frac{{}^{セ}3}{{}^{ソ}4}$$

AM$=\dfrac{1}{2}$，AF″$=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，∠AMF″$=$∠DME′$=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$$\angle\mathrm{E'MF''}=\pi-\angle\mathrm{AMF''}-\angle\mathrm{DME'}=\frac{\pi}{3}$$

よって，弧 EF と線分 ME，MF で囲まれる領域の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{{}^{\text{サ}}3}}{{}^{\text{シス}}12}\pi \quad\cdots①$$

図Ⅲにおいて，$\mathrm{AF}=\frac{3}{4}$ より，$\mathrm{BF}=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$

点 F′ から線分 BD に下した垂線の足を H として，

$$\mathrm{OH}=\mathrm{AF}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{4\sqrt{2}},\quad \mathrm{FH}=\mathrm{BF}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

さらに，F′H : FH=(長半径) : (短半径)=$3:\sqrt{7}$ より，$\mathrm{F'H}=\frac{3}{\sqrt{7}}\mathrm{FH}=\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$

よって，$\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{7}}$ となり，$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{7+1}}=\frac{\sqrt{{}^{\text{タ}}2}}{{}^{\text{チ}}4}$

弧 FG と線分 OF，OG で囲まれる領域の面積は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 2\beta\cdot\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{{}^{\text{ツ}}3\sqrt{{}^{\text{テ}}7}}{{}^{\text{ト}}4}\beta \quad\cdots②$$

頂点の軌跡によって囲まれる部分の面積は，

$$4(①+②+\triangle\mathrm{OME}+\triangle\mathrm{OMF})$$
$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{3\sqrt{7}}{4}\beta+\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{{}^{\text{ナ}}3}}{{}^{\text{ニ}}3}\pi+{}^{\text{ヌ}}3\sqrt{{}^{\text{ネ}}7}\beta+{}^{\text{ノ}}1$$

Ⅲ　関数 $f(x)$ について，区間 I における次の性質 (A) を考える。

性質 (A)　区間 I に含まれる任意の 2 点 a，b に対して

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

が成り立つ。

(1)　関数 $f(x)=-x^2$ は区間 $-\infty<x<\infty$ において性質 (A) を持つことを示せ。

(2)　関数 $f(x)$ が区間 I において性質 (A) を持つとき，区間 I に含まれる n 個の任意の数 a_1，a_2，…，a_n に対して

(B)　$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\geqq\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}$

が成り立つことが知られている。

このことを $n=2^k$ (k は自然数) の場合について証明せよ。

(3)　連続関数 $f(x)$ が区間 $[0,\ 1]$ において性質 (A) を持つとき，

$$\int_0^1 f(x)dx\leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つことを示せ。

解説

(1)　$f(x)=-x^2$ のとき，任意の実数 a，b に対して，

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f(a)+f(b)}{2}$$
$$=-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{-a^2-b^2}{2}=-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}$$
$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}\geqq 0$$

よって，$f(x)=-x^2$ は区間 $-\infty<x<\infty$ において性質 (A) を持つ。　…圏

(2)　k についての数学的帰納法で示す。

[1]　$k=1$ のとき，

$n=2$ であり，性質 (B) は性質 (A) と同値であるから成立する。

[2]　$k=l$ のとき，(B) が成り立つと仮定すると，

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^l}}{2^l}\right)\geqq\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2^l})}{2^l} \quad\cdots①$$

この仮定のもとで，$k=l+1$ のとき (B) について，

$$(\text{左辺})=f\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2^{l+1}-1}+a_{2^{l+1}}}{2^{l+1}}\right)$$
$$=f\left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\cdots+\frac{a_{2^{l+1}-1}+a_{2^{l+1}}}{2}}{2^l}\right) \quad\cdots②$$

2^l 個の実数 $\frac{a_1+a_2}{2}$，$\frac{a_3+a_4}{2}$，…，$\frac{a_{2^{l+1}-1}+a_{2^{l+1}}}{2}$ は区間 I に含まれるから，

① と同様の不等式が得られ，

$$②\geqq\frac{f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)+f\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{a_{2^{l+1}-1}+a_{2^{l+1}}}{2}\right)}{2^l}$$

さらに (A) を用いて，

$$②\geqq\frac{\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}+\frac{f(a_3)+f(a_4)}{2}+\cdots+\frac{f(a_{2^{l+1}-1})+f(a_{2^{l+1}})}{2}}{2^l}$$
$$=\frac{f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)+\cdots+f(a_{2^{l+1}-1})+f(a_{2^{l+1}})}{2^{l+1}}=(\text{右辺})$$

よって，(左辺)=②≧(右辺) となり，$k=l+1$ のときも (B) が成り立つ。

[1]，[2] より，$n=2^k$ (k は自然数) の場合に (B) が成り立つ。　…圏

(3)　$a_k=\frac{k}{n}$ ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) とする。

このとき，a_k はいずれも区間 $[0,\ 1]$ に属するから，(2) で既知とされた (B) を用いて，

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)\geqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\iff f\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\right)\geqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$\iff f\left(\frac{n+1}{2n}\right)\geqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

この不等式の両辺において，$n\longrightarrow\infty$ とする。

$f(x)$ は連続であるから，

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{n+1}{2n}\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

よって，

$$\int_0^1 f(x)dx\leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

となり，題意の不等式が成り立つ。　…圏

別解

$a=x$，$b=1-x$ ($0\leqq x\leqq 1$) とする。

このとき，a，b は区間 $[0,\ 1]$ に属するから，(A) を用いると，

$$f\left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)\geqq\frac{f(x)+f(1-x)}{2}\iff f\left(\frac{1}{2}\right)\geqq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(1-x)$$

さらに両辺を $0\leqq x\leqq 1$ で積分すると ($f(x)$ は連続なので積分可能)，

$$\int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)dx\geqq\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 f(1-x)dx \quad\cdots③$$

③ において，$f\left(\frac{1}{2}\right)$ は定数であるから，

$$\int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)dx=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

また，$\int_0^1 f(1-x)dx$ において，$x=1-t$ と置換すると，

$$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_1^0 f(t)\cdot(-dt)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx$$

よって，

$$③\iff f\left(\frac{1}{2}\right)\geqq\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$
$$\iff\int_0^1 f(x)dx\leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

となり，題意の不等式が成り立つ。　…圏

【講評】

例年よりも，解きやすい問題が（わずかではあるが）増えた印象を受ける。

Ⅰは，基本問題である(1)(2)を完答すべきである。(3)は途中まで点数を取りたい。(4)に関しては，式で押し通すよりも図で考えた方が速いが，気付かなかった受験生も多かったように思う。

Ⅱは，順天堂大学特有の難度の高い図形問題であった。最初の空欄以外に埋まらなかった受験生も多かったのではないだろうか。「糸を張りつめた状態で正方形の周りを一周させたときの頂点が動く軌跡」という表現をしっかりと読み取り，解答に反映させることのできた者は，ほとんどいなかったであろうと思われる。仮に読み取れたとしても，後半で円 S を考えるところ辺りから，またもや解きにくくなってくる。試験時間内に，最後の面積計算まで辿りつけた者は，受験生全体の極々一部にすぎなかったであろう。

Ⅲは，毎年恒例の記述式問題である。今年のテーマは凸不等式（Jensen の不等式）であった。(1)は実際に代入して計算で処理するだけの問題であるから，完答してほしいが，(2)から難度が高くなる。(2)(3)は完答することは難しかったであろう。

問題全体の雰囲気としては，今年も順天堂大学らしい問題群であったと言える。合格ラインは60％と思われる。