1 $f(x)=4ax-x^2$，$g(x)=\dfrac{a^2}{3}x^2$ とする。ただし，$a>0$ とする。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点を P_1，P_2 ($P_1<P_2$) とし，囲まれた面積を $h(a)$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) P_1，P_2 の座標を求めよ。

(2) $h(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ を連立すると

$$4ax-x^2=\frac{a^2}{3}x^2$$

$$x\left(\frac{a^2+3}{3}x-4a\right)=0 \qquad \therefore x=0,\ \frac{12a}{a^2+3}$$

この順に $y=0,\ \dfrac{48a^4}{(a^2+3)^2}$ となるので

$$P_1(0,\ 0),\ P_2\left(\frac{12a}{a^2+3},\ \frac{48a^4}{(a^2+3)^2}\right)$$

(2)

$$h(a)=\int_0^{\frac{12a}{a^2+3}}\{f(x)-g(x)\}dx=-\int_0^{\frac{12a}{a^2+3}}\frac{a^2+3}{3}x\left(x-\frac{12a}{a^2+3}\right)dx$$

$$=-\frac{a^2+3}{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{12a}{a^2+3}\right)^3$$

$$=\frac{96a^3}{(a^2+3)^2}$$

$$h'(a)=96\cdot\frac{3a^2(a^2+3)^2-a^3\cdot 2(a^2+3)\cdot 2a}{(a^2+3)^4}=\frac{96(9-a^2)}{(a^2+3)^3}a^2$$

a	(0)	…	3	…
$h'(a)$		+	0	−
$h(a)$		↗		↘

増減表より，$a=3$ のとき最大値 $h(3)=18$ をとる。

2 係数が実数の3次方程式 $x^3+ax^2+bx+a^2=0$ の解が α，$\alpha+\beta i$，$\alpha-\beta i$（ただし，i は虚数単位とし，α，β は0以外の実数）とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a，b，a^2 を α，β を用いて表せ。

(2) a，b の満たす条件を $(a,\ b)$ 平面に図示せよ。

(1) 解と係数の関係より

$$\alpha+(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=-a$$

$$\alpha(\alpha+\beta i)+(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)+(\alpha-\beta i)\alpha=b$$

$$\alpha(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=-a^2$$

$\therefore a=-3\alpha$ …①

$b=3\alpha^2+\beta^2$ …②

$a^2=-\alpha(\alpha^2+\beta^2)$ …③

(2) ①より $\alpha=-\dfrac{1}{3}a$ として②③へ代入する

$\alpha\neq 0$ より $a\neq 0$

であることに注意して

$$\begin{cases} b=\dfrac{1}{3}a^2+\beta^2 & \cdots②' \\ a^2=\dfrac{1}{3}a\left(\dfrac{1}{9}a^2+\beta^2\right) & \cdots③' \end{cases} \quad (a\neq 0)$$

②′を $\beta^2=b-\dfrac{1}{3}a^2$ として③′へ代入する

$\beta\neq 0$ より $\beta^2>0$ である

$$\beta^2=b-\frac{1}{3}a^2>0 \quad \cdots②''$$

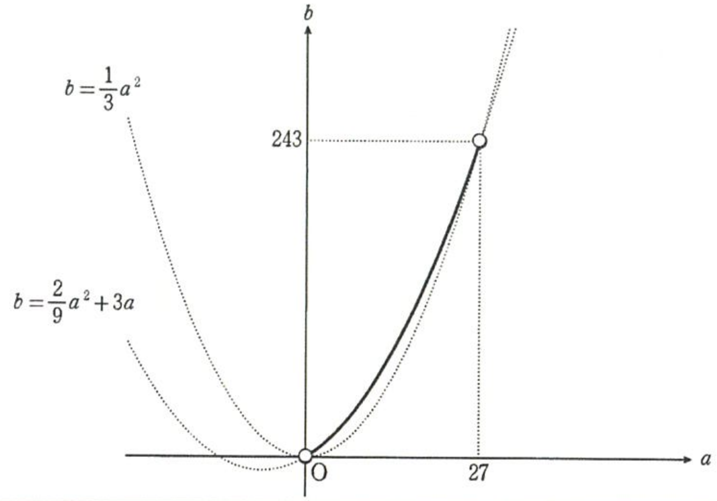
③′は

$$a^2=\frac{1}{3}a\left\{\frac{1}{9}a^2+\left(b-\frac{1}{3}a^2\right)\right\}$$

$a\neq 0$ より

$$a=\frac{1}{3}\left(b-\frac{2}{9}a^2\right) \iff b=\frac{2}{9}a^2+3a \quad \cdots③''$$

以上より求める a，b の条件は②″かつ③″であり，図は次のようになる。



$\boxed{3}$ $\dfrac{n^2}{m}+\dfrac{m}{n}=8$ を満たす自然数$(m,\ n)$をすべて求めよ。

$$\frac{n^2}{m}+\frac{m}{n}=8 \quad \cdots①$$

$$\Leftrightarrow m^2-8nm+n^3=0$$

解の公式より

$$m=4n\pm n\sqrt{16-n}$$

となるので，m が自然数になる条件は

$$1\leqq n\leqq 16 \quad \text{かつ} \quad 16-n \text{ が平方数}$$

であるので，

$$n=7,\ 12,\ 15,\ 16$$

$n=7$ のとき　$m=28\pm 7\sqrt{9}=7,\ 49$

$n=12$ のとき　$m=48\pm 12\sqrt{4}=24,\ 72$

$n=15$ のとき　$m=60\pm 15\sqrt{1}=45,\ 75$

$n=16$ のとき　$m=64$

これらはすべて①をみたす。

以上により求める自然数の組$(m,\ n)$は

$$(m,\ n)=(7,\ 7),\ (7,\ 49),\ (12,\ 24),\ (12,\ 72)$$
$$(15,\ 45),\ (15,\ 75),\ (16,\ 64)$$

の7組。

$\boxed{4}$ 表と裏の出る確率の等しいコインがある。$z_0=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$ とし，コインを投げて表が出たら $|z_0|$，裏が出たら $\dfrac{z_0}{|z_0|}$ をかける。かけた回数を n としたとき，z_n と書くことにする最初，複素数平面上で z は z_0 の位置にいるものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　コインを5回投げて $|z_5|\geqq 4$ になるときの確率を求めよ。

(2)　コインを10回投げて $\dfrac{5}{4}\pi<\arg z<\dfrac{3}{2}\pi$ になるときの確率を求めよ。

(3)　コインを15回投げて z_{15} の虚部が負かつ $|z_{15}|\geqq 15$ になるときの確率を求めよ。

題意より

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$|z_0|=\sqrt{2},\ \frac{z_0}{|z_0|}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

(1)　表が k 回，裏が $5-k$ 回であるとする。$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

$|z_5|\geqq 4$ となる条件は

$$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^k\cdot 1^{5-k}\geqq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad k\geqq 3$$

したがって求める確率は

$$\frac{{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5}{2^5}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

(2)　表が $10-k$ 回，裏が k 回であるとする。$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots 10)$

n を整数とすると

$$\frac{5}{4}\pi+2n\pi\leqq\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}k\leqq\frac{3}{2}\pi+2n\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{15}{4}+6n\leqq k+1\leqq\frac{9}{2}+6n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{4}+6n\leqq k\leqq\frac{7}{2}+6n$$

$0\leqq k\leqq 10$ に注意して

$n=0$ のとき　$\dfrac{11}{4}\leqq k\leqq\dfrac{7}{2}$　より　$k=3$

$n=1$ のとき　$\dfrac{35}{4}\leqq k\leqq\dfrac{19}{2}$　より　$k=9$

したがって求める確率は

$$\frac{{}_{10}C_3+{}_{10}C_9}{2^{10}}=\frac{65}{512}$$

(3)　表が $15-k$ 回，裏が k 回であるとする。$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots 15)$

$|z_{15}|\geqq 15$ となる条件は

$$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^{15-k}\geqq 15$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{2})^{16-k}\geqq(\sqrt{2})^8>15$$

より　$16-k\geqq 8$　　$\therefore k\leqq 8$　$\cdots①$

また，z_{15} の虚部が負である条件は(2)と同様に

$$\pi+2n\pi<\frac{k+1}{3}\pi<2\pi+2n\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+6n<k<5+6n$$

$n=0$ のとき　$2<k<5$　より　$k=3,\ 4$

$n=1$ のとき　$8<k<11$　より　$k=9,\ 10$

$n=2$ のとき　$14<k<17$　より　$k=15$

①より　$k=3,\ 4$　であればよい。

したがって求める確率は

$$\frac{{}_{15}C_3+{}_{15}C_4}{2^{15}}=\frac{455}{8192}$$

(講評)

昨年に比べ大幅に難化した。大問$\boxed{1}$は1/6公式を用いればいいが，a の分数関数になるため微分計算が必要となる。最後まで解き切るのは大変である。

大問$\boxed{2}$は解と係数の関係を用いたあと文字を消去して図示するだけなのだが，α，β を消去するときの変域に注意する必要がある。

大問$\boxed{3}$は整数問題で、n のとりうる範囲を絞ればよい。単純に m の2次方程式とみて解の公式で解けば先が見えるのだが，これが意外と難しく解けた人は少数だろう。

大問$\boxed{4}$は意味を読み取れれば決して難しくはない。が，状況がつかめなかった人も多かったろう。また，(2)(3)に進むにつれ計算が大変なので、本当にこれであってるか不安になった人もいるはず。

6割が目標となるが，仮に届かなかったとしても他教科の出来次第では十分チャンスがあるだろう。