近畿大前期(医)解答

1

(1) さいころの目 1，2，3，4，5，6 が描かれていることにより，全ての面は区別されるものとする．

3 面ずつ塗る塗り方は，1，2，3，4，5，6 のうち，どの 3 面を A で塗るかを考え，${}_6C_3 = {}^{ア}\boxed{20}$ 通り．

また，A，B，C の 3 色を 2 面ずつ塗る場合は，1，2，3，4，5，6 のうち，はじめにどの 2 面を A で塗るかで ${}_6C_2$ 通り．次に残った 4 面のうち，どの 2 面を B で塗るかで ${}_4C_2$ 通りであるから，${}_6C_2 \times {}_4C_2 = {}^{イ}\boxed{90}$ 通り．

(2) 2 色を使うのは，2 色の塗り分け方が全 6 面のうち，

$$\begin{cases} \cdot\ 1\text{面と}5\text{面}\cdots ① \\ \cdot\ 2\text{面と}4\text{面}\cdots ② \\ \cdot\ 3\text{面ずつ}\cdots ③ \end{cases}$$

と塗り分けられる 3 通りの場合がある．

① のときは，A，B のどちらを 1 面にするかで 2 通り

② のときは，2 面の選び方が

$$\begin{cases} \cdot\ \text{隣り合うように塗る} \\ \cdot\ \text{向かい合うように塗る} \end{cases}$$

の 2 通り．A，B のどちらで 2 面を塗るかを考えれば，4 通り．

③ のときは，

$$\begin{cases} \cdot\ 2\text{色共に向かい合うものが存在するように塗る} \\ \cdot\ 2\text{色共に向かい合うものが存在しないように塗る} \end{cases}$$

の 2 通り．(色の区別はしなくて OK)

以上より $2 + 4 + 2 = {}^{ウ}\boxed{8}$ 通り

また，3 色で塗り分けるのは全 6 面のうち，3 色の塗られる面の数が

$$\begin{cases} \cdot\ 1\text{面，}1\text{面，}4\text{面}\cdots ④ \\ \cdot\ 1\text{面，}2\text{面，}3\text{面}\cdots ⑤ \\ \cdot\ 2\text{面，}2\text{面，}2\text{面}\cdots ⑥ \end{cases}$$

となるときである．

④ のときは，

$$\begin{cases} \cdot\ 1\text{面のみ塗る}2\text{色が隣り合う} \\ \cdot\ 1\text{面のみ塗る}2\text{色が向かい合う} \end{cases}$$

の 2 通り．A，B，C の 3 色のうち，どれで 4 面塗るかも考え ${}_3C_1 = 3$ 通りであるから，計 6 通り．

⑤ のときは，まず 1 面だけ塗られる色（仮に A とする）が真上に来るように固定し，次に 2 面を塗る色 (仮に B とする) が

$$\begin{cases} \cdot\ \text{B が A の向かいに塗られ，隣り合う} \\ \cdot\ \text{B が A の向かいに塗られず，隣り合う} \\ \cdot\ \text{B が A の向かいに塗られず，向かい合うように塗る} \end{cases}$$

と塗られるときで 3 通り．A，B，C のうちどの色を 1 面，2 面，3 面塗るかで $3! = 6$ 通りであるから，計 18 通り．

⑥ のときは

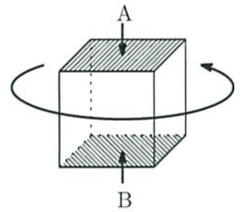
$$\begin{cases} \cdot\ 3\text{色とも向かい合う}\cdots ⑦ \\ \cdot\ 1\text{色だけ向かい合い，残り}2\text{色は隣り合う}\cdots ⑧ \\ \cdot\ 3\text{色とも隣り合う}\cdots ⑨ \end{cases}$$

と塗られるときで，

⑦ は 1 通り

⑧ は A，B，C のうち，どの色が向かい合うかを考え ${}_3C_1 = 3$ 通り

⑨ は向かい合う面が必ず異なる色で塗られることに注意し，右図のように真上の面が A，真下の面が B と塗られるように固定すると，側面は A，B，C，C で塗られる．



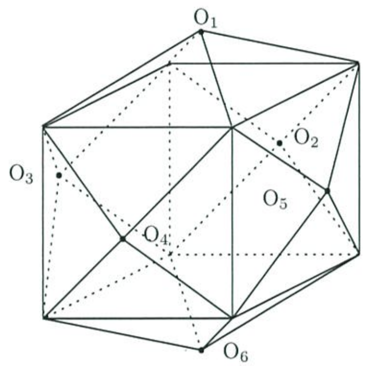
このとき，C が必ず隣り合うように塗る方法は，側面の A から時計回りに A，B，C，C または A，C，C，B と塗られる 2 通り．

これより ⑥ は ⑦,⑧,⑨ より，計 6 通り．

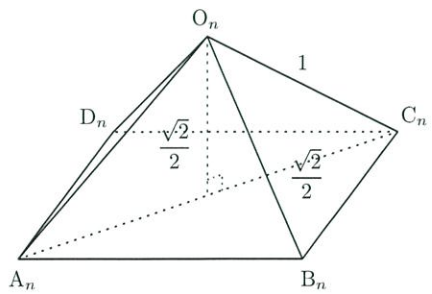
以上から ④,⑤,⑥ を足し合わせ，求める場合の数は，

$6 + 18 + 6 = {}^{エ}\boxed{30}$ 通り．

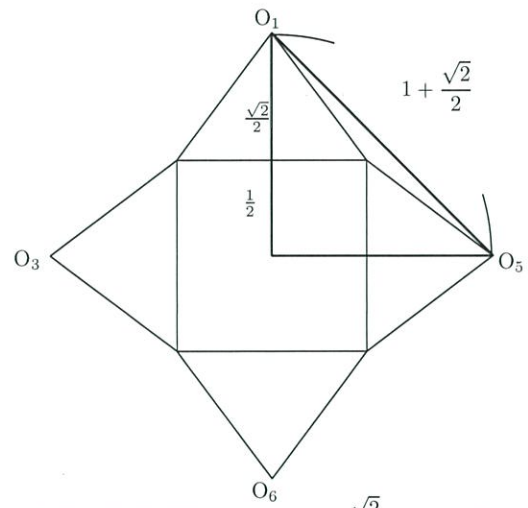
(3) 問題の設定は以下のよう．



これより上図の O_1 から O_6 をそれぞれ結んだものが考える正 8 面体 P である．



P の一辺の長さは，はりあわせた四角錐の高さが $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であることから，断面を考えることにより，$1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と求まる．



したがって，表面積は 1 辺の長さ $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の正 3 角形 8 つ分で

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 8 = {}^{オ}\boxed{2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}}$$

また，体積は 1 辺の長さ $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の四角錐 2 つ分で

$$\frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = {}^{カ}\boxed{\frac{7 + 5\sqrt{2}}{6}}$$

2

(1) $f(x) = x^3 - 3a^2x + 2a^3$ より，

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x + a)(x - a)$$

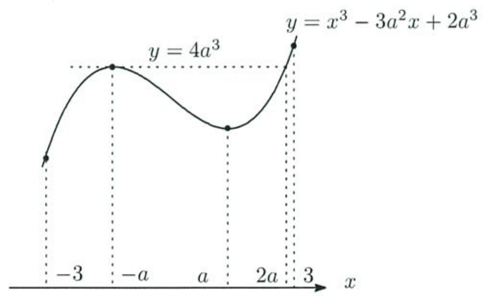
よって $a > 0$ に注意すると，$x = -a$ の前後で正から負，$x = a$ の前後で負から正に符号変化するから，

$\boxed{x = a \text{ で極小値 } m_1 = f(a) = 0}$

$\boxed{x = -a \text{ で極大値 } m_2 = f(-a) = 4a^3}$

(2) $-3 \leqq x \leqq 3$ における最大値 $M(a)$ は以下のように場合分けされる．

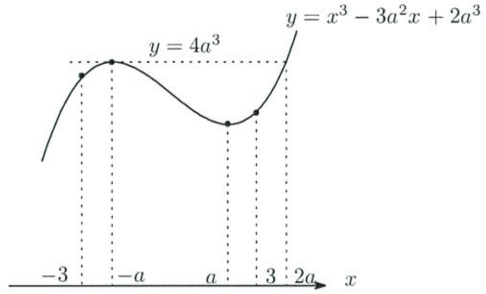
(i)$0 < a \leqq \frac{3}{2}$ のとき



このとき，$x = 3$ で最大となり，

$M(a) = f(3) = 2a^3 - 9a^2 + 27$

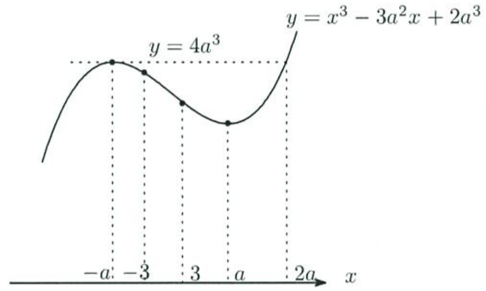
(ii)$\frac{3}{2} \leqq a \leqq 3$ のとき



このとき，$x = -a$ で最大となり，

$M(a) = f(a) = 4a^3$

(iii)$3 \leqq a$ のとき



このとき，$x = -3$ で最大となり，

$M(a) = f(-3) = 2a^3 + 9a^2 - 27$

以上から，$M(a) = m_2$ となるのは $\boxed{\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 3}$ のとき．

(3) (2) の結果から

$$M(a) = \begin{cases} 2a^3 - 9a^2 + 27 & \left(0 < a \leqq \dfrac{3}{2}\right) \\ 4a^3 & \left(\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 3\right) \\ 2a^3 + 9a^2 - 27 & (3 \leqq a) \end{cases}$$

であることが分かり，a で微分すると

$$\frac{d}{da}M(a) = \begin{cases} 6a^2 - 18a (= 6a(a - 3)) & \left(0 < a < \dfrac{3}{2}\right) \\ 12a^2 & \left(\dfrac{3}{2} < a \leqq 3\right) \\ 6a^2 + 18a (= 6a(a + 3)) & (3 \leqq a) \end{cases}$$

よって，上から順に単調減少，単調増加，単調増加と分かるので増減表は以下のよう

a	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$\frac{dM}{da}$		$-$	／	$+$		$+$
$M(a)$		↘		↗		↗

したがって，$M(a)$ は $a = \dfrac{3}{2}$ で最小値 $M\left(\dfrac{3}{2}\right) = \boxed{\dfrac{27}{2}}$ をとる．

$\boxed{3}$

(1) AC$=\sqrt{14}$ のとき $\triangle$ABC に対して余弦定理を用いると

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{5^2+2^2-14}{2\cdot5\cdot2}=\frac{3}{4}$$

$\angle$ABC が 3 角形の内角であることに注意して，

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

これより

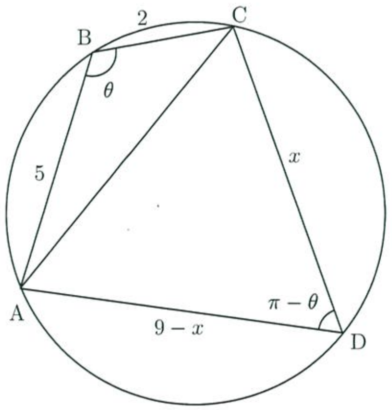
$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot5\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\boxed{\frac{5\sqrt{7}}{4}}$$

(注) 円に内接する 4 角形 ABCD という条件を考えるならば，厳密には **「そのような 4 角形は存在しない」** が正しい．
実際 $\triangle$CDA に関して，余弦定理を用いてみると，

$$x^2+(9-x)^2-2\cdot x\cdot(9-x)\cos\angle\mathrm{CDA}=14$$
$$\Leftrightarrow x^2+(9-x)^2-2\cdot x\cdot(9-x)\left(-\frac{3}{4}\right)=14$$
$$(\because \cos\angle\mathrm{ABC}=-\cos\angle\mathrm{CDA})$$
$$\Leftrightarrow x^2+(x^2-18x+81)+\frac{1}{2}(27x-3x^2)=14$$
$$\Leftrightarrow x^2-9x+134=0$$
$$\therefore x=\frac{9\pm\sqrt{81-4\cdot134}}{2}=\frac{81\pm\sqrt{-455}}{2}$$

である．x は虚数になり，条件をみたさない．

(2) 問題の設定は以下のよう．図のように θ を定める．



長さ x のとき，題意をみたす 4 角形 ABCD が存在したとすると，対角の和が π であるから，対角線 A C に関して，

$$\begin{cases}\cdot\,\mathrm{AC}^2 &=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cos\theta\\ \cdot\,\mathrm{AC}^2 &=x^2+(9-x)^2-2\cdot x\cdot(9-x)\cos(\pi-\theta)\end{cases}$$

よって，$-1<\cos\theta<1$ から

$$5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cos\theta$$
$$=x^2+(9-x)^2-2\cdot x\cdot(9-x)\cos(\pi-\theta)$$

なる θ が存在すれば，対角線 A C も存在し，題意をみたす 4 角形が存在すると言える．$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ を代入し整理すると，

$$29-20\cos\theta$$
$$=x^2+(x^2-8x+81)+(-2x^2+18x)\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow (x^2-9x-10)\cos\theta=x^2-9x+26$$
$$\therefore \cos\theta=\frac{x^2-9x+26}{x^2-9x-10}\cdots(*)\qquad(\because 0<x<9)$$

よって，θ が存在するには，

$$-1<\frac{x^2-9x+26}{x^2-9x-10}<1$$

を x がみたせばよい．全辺に $x^2-9x-10<0(\because 0<x<9)$ を掛けて，

$$-(x^2-9x-10)>x^2-9x+26>x^2-9x-10$$
$$\Leftrightarrow -x^2+9x+10>x^2-9x+26\qquad(\because \text{右側は常に成立})$$
$$\Leftrightarrow x^2-9x+8<0$$
$$\therefore \boxed{1<x<8}$$

(注)$(*)$ より $0<x<9$ であったから

$$x^2-9x+26>0$$
$$x^2-9x-10<0$$

であり，θ は常に鈍角である．
このことからも (1) の設定は **実現不可能** であることが分かる．

(3) 4 角形 ABCD の面積 S は $(\triangle\mathrm{ABC})+(\triangle\mathrm{CDA})$ より

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot5\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot x(9-x)\sin\theta\cdots(**)$$

ここで，$\sin\theta$ は $(*)$ より，3 角形の内角であるから，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{x^2-9x+26}{x^2-9x-10}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{(x^2-9x-10)^2-(x^2-9x+26)^2}}{|x^2-9x-10|}$$
$$=\frac{6\sqrt{2}\sqrt{(x-1)(8-x)}}{-x^2+9x+10}\qquad(\because 0<x<9)$$

これを $(**)$ に代入して

$$(**)=\frac{1}{2}\cdot(10+9x-x^2)\cdot\frac{6\sqrt{2}\sqrt{(x-1)(8-x)}}{-x^2+9x+10}$$
$$=3\sqrt{2}\sqrt{(x-1)(8-x)}$$

(2) を考慮し，これの $1<x<8$ における最大値を求めればよい．$(x-1)(8-x)=-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{49}{4}$ から，S は $x=\frac{9}{2}$ のとき，最大値 $\boxed{\frac{21\sqrt{2}}{2}}$ をとる．