[Ⅰ]

問1 ③　問2 ①　問3 ③　問4 ②

[Ⅱ]

問1 $r=\dfrac{25}{2}$　$(a,\ b)=\left(4,\ \dfrac{9}{2}\right)$

問2 $r=5$　$(a,\ b)=(3,\ -1)$

[Ⅲ]

$\dfrac{2}{7}$倍

[Ⅳ]

問1 $a=e^{-5}$　問2 $c<b<d<a$　問3 e^{-5}

[Ⅴ]

問1 $a_1=0,\ 1$ のときは自明に成り立つ。

$a_1\fallingdotseq 0,\ 1$ のとき

$$F(t)=a_1f(t)+a_2f(x_2)-f(a_1t+a_2x_2)$$

$$F'(t)=a_1f'(t)-a_1f'(a_1t+a_2x_2)$$

$$=a_1\{f'(t)-f'(a_1t+a_2x_2)\}$$

より

$$F'(x_2)=a_1\{f'(x_2)-f'((a_1+a_2)x_2)\}=0 \quad (\because a_1+a_2=1)$$

であり，任意の実数 t に対して

$$f''(t)>0$$

により $f'(t)$ は単調増加関数であるので，$a_1>0$ に注意して

$F(t)$ は $t=x_2$ において極小かつ最小となる。

$$F(x_2)=a_1f(x_2)+a_2f(x_2)-f(a_1x_2+a_2x_2)=0$$

したがって，題意の不等式は成り立つ。終

問2

（i） $n=2$ のときは問1により成り立つ。

（ii） $n=l\ (l\geqq 2)$ のとき成り立つと仮定すると，$f\left(\sum_{j=1}^{l}a_jx_j\right)\leqq\sum_{j=1}^{l}a_jf(x_j)$ である。

ここで，$n=l+1$ のときを考えよう。$\sum_{j=1}^{l+1}a_j=1$ を満たす数列 $\{a_j\}$ があり，

$a_1+a_2+\cdots+a_l=0,\ a_{l+1}=1$ のときは，明らかに成り立つので，

$a_1+a_2+\cdots+a_l\fallingdotseq 0$ のときを考え，$a_1+a_2+\cdots+a_l=s(>0)$ とおき，数列 $\{b_j\}$ を

$b_j=\dfrac{a_j}{a_1+a_2+\cdots+a_l}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ と定める。

$$f\left(\sum_{j=1}^{l+1}a_jx_j\right)=f\left(s\sum_{j=1}^{l}b_jx_j+a_{l+1}x_{l+1}\right)$$

$$\leqq sf\left(\sum_{j=1}^{l}b_jx_j\right)+a_{l+1}f(x_{l+1}) \quad (\because s>0,\ a_{l+1}\geqq 0,\ s+a_{l+1}=1)$$

$$\leqq s\left(\sum_{j=1}^{l}b_jf(x_j)\right)+a_{l+1}f(x_{l+1})$$

$$=s\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{a_j}{s}f(x_j)\right)+a_{l+1}f(x_{l+1})$$

$$=\sum_{j=1}^{l}a_jf(x_j)+a_{l+1}f(x_{l+1})$$

$$=\sum_{j=1}^{l+1}a_jf(x_j)$$

よって，$n=l+1$ のときも成り立つ.

（i）（ii）より数学的帰納法により，2以上の自然数 n について

$$f\left(\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\right)\leqq\sum_{j=1}^{n}a_jf(x_j)$$

が成り立つことが示された。終

問3

問2の不等式に代入すると，

$$f\left(\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\right)\leqq\sum_{j=1}^{n}a_jf(x_j)$$

$$e^{\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{p_j}}\leqq\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{x_j}}{p_j} \quad \cdots答$$

問4

$x_j=p_j\log A_j$ を問3の不等式に代入すると，

$$e^{\sum_{j=1}^{n}\log A_j}\leqq\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{p_j\cdot\log A_j}}{p_j}$$

$$e^{\log A_1+\log A_2+\cdots+\log A_n}\leqq\sum_{j=1}^{n}\frac{(e^{\log A_j})^{p_j}}{p_j}$$

$$\prod_{j=1}^{n}e^{\log A_j}\leqq\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^{\ p_j}}{p_j}$$

$$\prod_{j=1}^{n}A_j\leqq\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^{\ p_j}}{p_j}$$

となる. 終

問5

問4より，

$$\prod_{j=1}^{n}A_j\leqq\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^{\ p_j}}{p_j}$$

である. ここに，$A_j=\dfrac{|g_j(x)|}{\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}}$ を代入すると，

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{|g_j(x)|}{\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}}\leqq\sum_{j=1}^{n}\frac{|g_j(x)|^{p_j}}{p_j\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx}$$

ここで，$\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx=K_j$ とおき，辺々に $\prod_{j=1}^{n}\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$ (>0) をかけると

$$\prod_{j=1}^{n}|g_j(x)|\leqq\sum_{j=1}^{n}\frac{|g_j(x)|^{p_j}}{p_j\cdot K_j}\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

ここで，区間 $[a,\ b]$ において，両辺ともに正なので，x で定積分すると，

$$\int_a^b\prod_{j=1}^{n}|g_j(x)|dx\leqq\int_a^b\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{|g_j(x)|^{p_j}}{p_j\cdot K_j}\right)dx\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{p_j\cdot K_j}\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right\}\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{p_j\cdot K_j}\cdot K_j\right)\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j}\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left(\int_a^b|g_j(x)|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}} \quad \left(\because\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j}=1\right)$$

よって示された. 終

【講評】

[Ⅰ] 基本的な知識を深く理解しているかを問う問題である．問1では $a=0$ の場合を考えることが必要，また問4は対偶をとると考えやすい.

[Ⅱ] 問題の意味を読み取ることで，三角形の外心と内心を求めればよいことが分かる.

[Ⅲ] 誘導はないが，基本的な知識だけで解ける問題である.

[Ⅳ] a，b，c の大小関係はすぐに分かる．d については，$d=\sqrt{ab}$ から a と b の間にあることが分かる．また，問4では $a^x<a^x+b^x+c^x+d^x<4a^x$ から，両辺を $\dfrac{1}{x}$ 乗してはさみうちの原理を用いると $a=e^{-5}$ に収束することが分かる.

[Ⅴ] 完答は難しいので，問2か問3あたりまで解答できれば十分である．抽象的な問題なので，手が付けられなくても他の問題で挽回すればよい.

一次合格ラインは60％程度と考えられれる.