1. 次の$\boxed{}$に当てはまる適切な数値を解答欄に記入せよ.

(1) 大，中，小3個のさいころを同時に投げるとき，それぞれのさいころの出る目を a，b，c とする．出る目に応じて，得点を次のように定める．

- $a+b<c$ のとき，得点を $(a+b+c)$ 点とする．
- $a+b\geqq c$ のとき，得点を $2(a+b+c)$ 点とする．

このとき，得点が5点となる確率は$\boxed{(ア)}$であり，得点が8点以下となる確率は$\boxed{(イ)}$である．

(2) △ABCに半径2の円が内接し，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{5}{13}$ のとき，辺BCの長さは$\boxed{(ウ)}$であり，△ABCの面積は$\boxed{(エ)}$である．

解説

(1) 次の表を利用する．

(c)

$(a+b)$ \ (c)	1	2	3	4	5	6
2	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	5	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$
3	$\boxed{8}$	10	12	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	9
4	10	12	14	16	9	10

(ア) 得点が5点となるのは，

$$a+b=2 \text{ かつ } c=3$$

のときである．すなわち，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 3)$ のときなので，1通り．

$$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216} \quad \cdots 答$$

(イ) 得点が8点以下となるのは，

(i) $a+b=2$ のとき，c は任意である．すなわち，$(a,\ b)=(1,\ 1)$，c は任意なので，

$$\frac{1\cdot 6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

(ii) $a+b=3\ [\iff (a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)]$，$c=1,\ 4,\ 5$ のとき．

$$\frac{2\cdot 3}{6^3}=\frac{1}{36}$$

よって，(i)，(ii)は互いに排反なので，

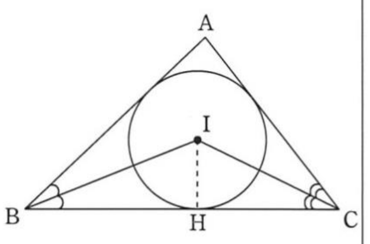
$$\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{18} \quad \cdots 答$$

(2) △ABCの内心をIとし，Iから辺BCに垂線IHを下ろすと，IH=2

また，半角の公式を用いて，

$$\tan^2\angle\mathrm{IBH}=\frac{1-\cos\angle\mathrm{ABC}}{1+\cos\angle\mathrm{ABC}}=\frac{1}{4},$$

$$\tan^2\angle\mathrm{ICH}=\frac{1-\cos\angle\mathrm{ACB}}{1+\cos\angle\mathrm{ACB}}=\frac{4}{9}$$



$\angle\mathrm{IBH}$，$\angle\mathrm{ICH}$ は鋭角であるから，

$$\tan\angle\mathrm{IBH}=\frac{1}{2}, \quad \tan\angle\mathrm{ICH}=\frac{2}{3}$$

したがって，

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BH}+\mathrm{CH}=\frac{\mathrm{IH}}{\tan\angle\mathrm{IBH}}+\frac{\mathrm{IH}}{\tan\angle\mathrm{ICH}}=4+3=7 \quad \cdots 答$$

$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{5}{13}$ より，

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{4}{5}, \quad \sin\angle\mathrm{BCA}=\frac{12}{13}$$

$\mathrm{AB}=5x$，$\mathrm{AC}=13y$ とおくと，

$$5x\cos\angle\mathrm{ABC}+13y\cos\angle\mathrm{BCA}=7,$$

$$5x\sin\angle\mathrm{ABC}=13y\sin\angle\mathrm{BCA} \quad \cdots ①$$

したがって，

$$3x+5y=7, \quad 4x=12y \iff x=\frac{3}{2}, \quad y=\frac{1}{2}$$

△ABCの底辺をBCと考えるとき，①の値6が高さを表すから，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 6=21 \quad \cdots 答$$

2.

m は定数で，$m>1$ とする．関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{mx}\frac{|t-e|}{t}dt\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $f(x)$ を求めよ．また，$f(x)$ が最小値をとる x の値を a とするとき，a を m を用いて表せ．

(2) a を (1) で求めた値とする．曲線 $y=f(x)$ とその曲線上の点 $(e,\ f(e))$ における接線，および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を $S(m)$ とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}S(m)$ を求めよ．

必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい．

解説

$$m>1,\ f(x)=\int_x^{mx}\frac{|t-e|}{t}dt\ (x>0)$$

(1) 被積分関数が $t>0$ において連続関数なので，

$$f'(x)=\frac{|mx-e|}{mx}\cdot(mx)'-\frac{|x-e|}{x}$$

$$=\frac{|mx-e|-|x-e|}{x}\quad\cdots①$$

よって，$x>0$ のすべての x において微分可能である．

$f'(x)=0$ となるとき，

$$|mx-e|=|x-e|$$

$$\Longleftrightarrow\ mx-e=\pm(x-e)$$

$$\Longleftrightarrow\ x=0,\ \frac{2e}{m+1}$$

よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2e}{m+1}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↘		↗

したがって，$a=\dfrac{2e}{m+1}$ となる．　…答

(i) $mx\leqq e \Longleftrightarrow x\leqq\dfrac{e}{m}$ のとき，

$$f(x)=\int_x^{mx}\frac{-(t-e)}{t}dt=\int_x^{mx}\left(\frac{e}{t}-1\right)dt=\Big[e\log t-t\Big]_x^{mx}$$

$$=e\log m-(m-1)x$$

(ii) $x\leqq e\leqq mx \Longleftrightarrow \dfrac{e}{m}\leqq x\leqq e$ のとき，

$$f(x)=\int_x^{e}\frac{-(t-e)}{t}dt+\int_e^{mx}\frac{t-e}{t}dt=\Big[e\log t-t\Big]_x^{e}+\Big[t-e\log t\Big]_e^{mx}$$

$$=(m+1)x-2e\log x-e\log m$$

(iii) $e\leqq x$ のとき，

$$f(x)=\int_x^{mx}\frac{t-e}{t}dt=(m-1)x-e\log m$$

したがって，

$$f(x)=\begin{cases}e\log m-(m-1)x & \left(0<x\leqq\dfrac{e}{m}\right)\\ (m+1)x-2e\log x-e\log m & \left(\dfrac{e}{m}\leqq x\leqq e\right)\\ (m-1)x-e\log m & (e\leqq x)\end{cases}\quad\cdots答$$

(2) ①より，$f'(e)=m-1$ であり，点 $(e,\ f(e))$ における接線の方程式は，

$$y=(m-1)x-e\log m$$

である．また，$a\leqq x\leqq e$ において，

$$f'(x)=m+1-\frac{2e}{x},\quad f''(x)=\frac{2e}{x^2}>0$$

なので，$f(x)$ は下に凸であり，接線は $y=f(x)$ の下に存在する．

$$S(m)=\int_a^e[\{(m+1)x-e\log m-2e\log x\}-\{(m-1)x-e\log m\}]dx$$

$$=\int_a^e(2x-2e\log x)dx$$

$$=\Big[x^2-2ex\log x+2ex\Big]_a^e$$

$$=e^2-a^2-2ea+2ea\log a$$

$m\to\infty$ のとき，$a\to+0$ であり，$a=\dfrac{1}{x}$ の置換を用いて

$$\lim_{a\to+0}a\log a=\lim_{x\to\infty}\frac{-\log x}{x}=0$$

よって，

$$\lim_{m\to\infty}S(m)=\lim_{a\to+0}(e^2-a^2-2ea+2ea\log a)=e^2\quad\cdots答$$

3.

定数 p は素数とし，条件

$$a(ab-p^2)=c^2,\quad b\leqq 2c$$

をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える．a が素数であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ．

(2) $a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 となるような自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ．

解説

(1) $a(ab-p^2)=c^2$　…① より，c^2 は a の倍数であるから，c も a の倍数である．

したがって，$c=ak$ (k は自然数) と表すことができ，

$$① \Longleftrightarrow ab-p^2=ak^2 \Longleftrightarrow a(b-k^2)=p^2\quad\cdots②$$

これより，p^2 は a の倍数であるが，a も素数であるから，$a=p$

したがって，

$$② \Longleftrightarrow b-k^2=p \Longleftrightarrow b=k^2+p$$

以上より，

$$(a,\ b,\ c)=(p,\ k^2+p,\ pk)\quad(k\geqq 1)$$

さらに，$b\leqq 2c$ より，

$$k^2+p\leqq 2pk \Longleftrightarrow (k-p)^2\leqq p^2-p$$

$$\Longleftrightarrow p-\sqrt{p^2-p}\leqq k\leqq p+\sqrt{p^2-p}\quad\cdots③$$

ここで，$\sqrt{(p-1)^2}<\sqrt{p(p-1)}<\sqrt{p^2}$ より，

$$p-1<\sqrt{p^2-p}<p$$

であるから，自然数 k の範囲は，

$$③ \Longleftrightarrow p-(p-1)\leqq k\leqq p+(p-1) \Longleftrightarrow 1\leqq k\leqq 2p-1$$

したがって，組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は $2p-1$　…答

(2) $(a,\ b,\ c)=(p,\ k^2+p,\ pk)$ より，$b=k^2+p$ が p の倍数でなければよい．

この条件は，

$$k^2 が p の倍数でない \Longleftrightarrow k が p の倍数でない$$

と同値であり，$1\leqq k\leqq 2p-1$ の範囲では，

$$1\leqq k\leqq 2p-1\quad かつ\quad k\neq p$$

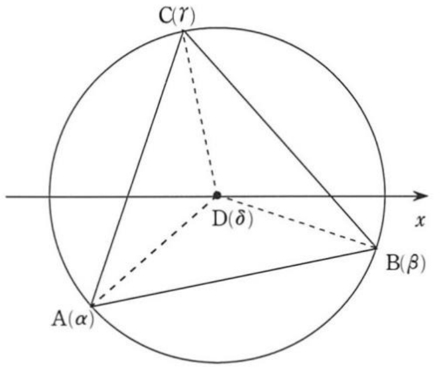
したがって，組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は $2p-2$　…答

4． 複素数平面上の3点 A(α)，B(β)，C(γ) は正三角形 ABC をなし，$\alpha\beta\gamma=-1$ をみたしている．△ABC の重心 D(δ) が実軸上にあり，$\delta>-1$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，複素数平面上で複素数 z を表す点 P を P(z) と書く．

(1)　△ABC の外接円の半径 l を δ の式で表せ．

(2)　α，β，γ を δ の式でそれぞれ表せ．ただし，$-\pi\leqq\arg\alpha<\arg\beta<\arg\gamma<\pi$ とする．ここで，$\arg z$ は複素数 z の偏角を表す．

解説



(1)　$z=\alpha-\delta$ とおくと，$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ を用いて，

α，β，γ を次のように表すことができる．

$$\delta+z,\quad \delta+z\omega,\quad \delta+z\omega^2$$

したがって，

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma&=(\delta+z)(\delta+z\omega)(\delta+z\omega^2)\\&=\delta^3+(z+z\omega+z\omega^2)\delta^2+(z\cdot z\omega+z\omega\cdot z\omega^2+z\omega^2\cdot z)\delta+z\cdot z\omega\cdot z\omega^2\\&=\delta^3+z(1+\omega+\omega^2)\delta^2+z^2(\omega+1+\omega^2)\delta+z^3\\&=\delta^3+z^3\end{aligned}$$

$\alpha\beta\gamma=-1$ より，

$$\delta^3+z^3=-1 \iff z^3=-1-\delta^3$$

したがって，$l=|z|$ なので

$$l^3=1+\delta^3 \iff l=\sqrt[3]{1+\delta^3}\quad \cdots 答$$

(2)　$z^3=(\alpha-\delta)^3=-1-\delta^3$ より，

$$\alpha-\delta=-\sqrt[3]{1+\delta^3} \iff \alpha=\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}\quad \cdots 答$$

また，

$$\begin{aligned}\delta+z\omega&=(\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}-\delta)\omega+\delta\\&=\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}\,\omega\\&=\delta+\frac{\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{1+\delta^3}\,i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta+z\omega^2&=(\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}-\delta)\omega^2+\delta\\&=\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}\,\omega^2\\&=\delta+\frac{\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{1+\delta^3}\,i\end{aligned}$$

それぞれの複素数の偏角の大きさから，

$$\beta=\delta+\frac{\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{1+\delta^3}\,i\quad \cdots 答$$

$$\gamma=\delta+\frac{\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{1+\delta^3}\,i\quad \cdots 答$$

別解

「△ABC が正三角形である」

$$\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$$

$$\iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

よって，

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0$$

ここで，$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\delta \iff \alpha+\beta+\gamma=3\delta$ なので，代入すると

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3\delta^2$$

これと $\alpha\beta\gamma=-1$ より，3数 α，β，γ を解に持つ t の3次方程式を作ると，

$$t^3-3\delta t^2+3\delta^2t+1=0$$

$$\iff (t-\delta)^3=-1-\delta^3$$

$$\iff t-\delta=-\sqrt[3]{1+\delta^3},\ -\sqrt[3]{1+\delta^3}\,\omega,\ -\sqrt[3]{1+\delta^3}\,\omega^2$$

ただし，$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ とする．

よって，

$$t=\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3},\ \delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}\,\omega,\ \delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}\,\omega^2$$

となる．それぞれの偏角を考えれば，

$$\alpha=\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3},\ \beta=\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}\,\omega,\ \gamma=\delta-\sqrt[3]{1+\delta^3}\,\omega^2$$

【講評】

昨年度よりは易化していると考えられるが，それでも手を付けにくい問題があり，容易ではなかった．特に，大問3，4は初動で適切な発想ができないと，(1) すら解答にたどり着くことは難しい．大問1，2でどれだけ点数を稼げるかが勝負の分かれ目となる．一次合格ラインは55％程度であろう．