1 x，y を 1 以上の整数とする。

(1) $xy=12$ を満たす x，y の組み合わせをすべて求めると $(x,\ y)=$ ① となる。

(2) $xy+2x-y-14=0$ を満たす x，y の組み合わせをすべて求めると $(x,\ y)=$ ② となる。

(3) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y}+1=0$ を満たす x，y の組み合わせをすべて求めると $(x,\ y)=$ ③ となる。

(1) $(x,\ y)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$ …①の答

(2) $(x-1)(y+2)=12$

と変形すると，$y+2\geqq 3$ に注意して

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より

$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (3,\ 4),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$ …②の答

(3) xy をかけて整理すると

$(x+4)(y-5)=-20$

$x+4\geqq 5$ に注意して

$$\begin{pmatrix} x+4 \\ y-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

より

$(x,\ y)=(16,\ 4),\ (6,\ 3),\ (1,\ 1)$ …③の答

2 $0\leqq x\leqq \pi$ のとき，$f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\sin 2t\,dt$ は $x=$ ④ で最小値 ⑤ をとる。また，最大値は ⑥ である。

$$\begin{aligned} f(x)&=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_x^{2x} \\ &=-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x) \\ &=-\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-1-\cos 2x) \\ &=-\left(\cos 2x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{16} \end{aligned}$$

であり，$0\leqq x\leqq \pi$ のとき $-1\leqq \cos 2x\leqq 1$ であることに注意すると

$\cos 2x=-1$ つまり $x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき 最小値 -1 …④⑤の答

また

$\cos 2x=\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{16}$ …⑥の答

3 $a_n=n^2-n+1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ があり，$b_k=a_{3k-1}$ と定められる数列を $\{b_k\}$ とする。ただし，n と k は 1 以上の整数とする。b_k が 3 桁の整数であるとき，k の最小値を l，最大値を m とすると $l=$ ⑦ であり，$m=$ ⑧ である。このとき，$\displaystyle\sum_{k=l}^{m} b_k=$ ⑨ となる。

$$\begin{aligned} b_k&=a_{3k-1} \\ &=(3k-1)^2-(3k-1)+1 \\ &=9k^2-9k+3 \end{aligned}$$

であり，これが 3 桁である条件は b_k は常に整数値をとるので

$100\leqq 9k^2-9k+3\leqq 999$

変形すると

$10<\dfrac{97}{9}\leqq k(k-1)\leqq\dfrac{996}{9}<111$

となる。

$k(k-1)>10$ を満たす最小の k は $k=4$

$k(k-1)<111$ を満たす最大の k は $k=11$

このとき，$b_4=109$，$b_{11}=993$ であり十分

したがって　$l=4$，$m=11$ …⑦⑧の答

また，このとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{11} b_k&=\sum_{k=1}^{11} b_k-\sum_{k=1}^{3} b_k \\ &=\sum_{k=1}^{11}(9k^2-9k+3)-\sum_{k=1}^{3}(9k^2-9k+3) \\ &=9\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}-9\cdot\frac{11\cdot 12}{2}+3\cdot 11-\left(9\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6}-9\cdot\frac{3\cdot 4}{2}+3\cdot 3\right) \\ &=3912 \end{aligned}$$

…⑨の答

4 座標平面上の 4 つの点が $(x_n,\ y_n)=\left(\cos\left(\theta+\dfrac{n\pi}{2}\right),\ c+\sin\left(\theta+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$，$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ で与えられるとき，これら 4 つの点を順に結んでできる正方形を考える。ただし，c は実数，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}$ である。

(1) この正方形の 1 辺の長さは ⑩ である。

(2) どのような $\theta\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値に対しても，この正方形が x 軸と共有点をもつ c の範囲は ⑪ である。

(3) $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，この正方形が x 軸と共有点をもつ θ の範囲は ⑫ である。

4 点をそれぞれ

A$(\cos\theta,\ c+\sin\theta)$，B$(-\sin\theta,\ c+\cos\theta)$，

C$(-\cos\theta,\ c-\sin\theta)$，D$(\sin\theta,\ c-\cos\theta)$

とおく。この正方形の中心は対角線の中点 $(0,\ c)$ である。

(1) 1 辺の長さは

$\mathrm{AB}=\sqrt{(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sqrt{2}$ …⑩の答

(2) $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき

(※)　$0\leqq\sin\theta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta\leqq 1$

である。

(i) $c=0$ のとき，正方形の中心は原点であるので題意を満たす。

(ii) $c>0$ のとき，求める条件は任意の θ に対し

正方形内の最下点$\leqq 0$

である。(※)より

(D の y 座標)$=c-\cos\theta\leqq 0$　つまり　$\cos\theta\geqq c$

これが任意の θ で成り立つのは

$c\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$c>0$ とあわせて

$0<c\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $c<0$ のとき，同様にして

正方形内の最上点$\geqq 0$

であり，(※)より

(B の y 座標)$=c+\cos\theta\geqq 0$　つまり　$\cos\theta\geqq -c$

これが任意の θ で成り立つのは

$-c\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq c<0$

以上 (i) (ii) (iii) により

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq c\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ …⑪の答

(3) $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，最下点 D の y 座標$\leqq 0$ であればよいので

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\leqq 0$　つまり　$\cos\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}$ に注意して求める θ の値の範囲は

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ …⑫

5 毎回，同じ確率で A，B，C，D のいずれかの記号がでるクジがある。

(1) 4 回引いて，4 種類がすべて出る確率は ⑬ である。

(2) 5 回引いて，いずれか 2 種のみが出る確率は ⑭ である。

(3) 5 回目に初めて 4 種類がすべて出る確率は ⑮ である。

(1) $\dfrac{4!}{4^4}=\dfrac{3}{32}$ …⑬の答

(2) どの 2 種が出るか ${}_4C_2$ 通りあり，例えば A，B のみが出るとすると

AAAAB（ABBBB） と AAABB（AABBB）

のパターンがあり，それぞれの順列を考えると

$$\frac{{}_4C_2\left(2\times\dfrac{5!}{4!}+2\times\dfrac{5!}{3!2!}\right)}{4^5}=\frac{6(10+20)}{4^5}$$

$$=\frac{45}{256}$$ …⑭の答

(3) 5 回目までに 3 種類の文字が出ているのは

どの 3 種が出るか ${}_4C_3$ 通り，例えば A，B，C のみが出るとすると

AABC

のようにいずれか 1 文字が重なり（3 通り），その順列を考えると

$$\frac{{}_4C_3\times3\times\dfrac{4!}{2!}}{4^5}=\frac{4\times3\times12}{4^5}$$

$$=\frac{9}{64}$$ …⑮の答

6 次の計算をしなさい。

(1) $x>0$ のとき，$\dfrac{d}{dx}(x^{\cos x})=$ ⑯

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{4}{x^7(x^{-6}+1)^{\frac{4}{3}}}dx=$ ⑰

(1) $f(x)=x^{\cos x}$ $(x>0)$ とおいて，両辺自然対数をとる

$\log f(x)=\cos x\log x$

x で微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\log x+\cos x\frac{1}{x}$$

よって

$$f'(x)=x^{\cos x}\left(-\sin x\log x+\frac{\cos x}{x}\right)$$ …⑯の答

(2) $t=x^{-6}+1$ と置換すると，C を積分定数として

$$\int\frac{4}{x^7t^{\frac{4}{3}}}\left(-\frac{1}{6}x^7dt\right)=-\frac{2}{3}\int t^{-\frac{4}{3}}dt$$

$$=-t^{\frac{-1}{3}}+C$$

$$=-(x^{-6}+1)^{\frac{-1}{3}}+C$$ …⑰の答

【講評】

どれも基本から標準問題である．4は問題の意図が読みにくいので，差がついたであろう。限られた時間の中でミスを回避し，8 割を目指したい。