【2017年2月8日】日本大学A方式(数学)

[1]

(1) 2次方程式 $3x^2+5x+8=0$ の2つの解を α，β とするとき，

$\alpha^2+\beta^2=-\dfrac{\boxed{1}\boxed{2}}{\boxed{3}}$，$\alpha^3+\beta^3=\dfrac{\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}}{\boxed{7}\boxed{8}}$ である．

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}=0 \\ |3x+1|\leqq 4 \end{cases}$$

を解くと，$-\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{10}}\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}}$ である．

(3) 円に内接する四角形ABCDにおいて，

AB$=2\sqrt{3}$，BC$=2$，CD$=\sqrt{2}$，$\angle$ABC$=30^\circ$ であるとき，

AD$=\dfrac{\sqrt{\boxed{13}\boxed{14}}-\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{16}}$ である．

(4) 3つの直線

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 2x+y-3=0 \\ m^2x+my-2m-9=0 \end{cases}$$

が1点で交わるような定数 m の値は $m=\boxed{17}$，$-\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ である．

(1) 解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{3},\quad \alpha\beta=\frac{8}{3}$$

したがって，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{25}{9}-\frac{16}{3}=-\frac{23}{9}\quad\cdots答$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=-\frac{5}{3}\left(-\frac{23}{9}-\frac{8}{3}\right)=\frac{235}{27}\quad\cdots答$$

(2) $x^2+\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}\leqq 0 \iff (x+2)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\leqq 0 \iff -2\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}$ …①

$|3x+1|\leqq 4 \iff -4\leqq 3x+1\leqq 4 \iff -\dfrac{5}{3}\leqq x\leqq 1$ …②

①かつ②より，

$$-\frac{5}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}\quad\cdots答$$

(3) △ABCに余弦定理を用いて，

$$\mathrm{AC}^2=(2\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cos 30^\circ=4$$

一方，AD$=x$ とおき，△ACDに余弦定理を用いて，

$$\mathrm{AC}^2=x^2+(\sqrt{2})^2-2x\cdot\sqrt{2}\cos 150^\circ$$

$$\iff 4=x^2+2+\sqrt{6}x$$

$$\iff x^2+\sqrt{6}x-2=0$$

$$\iff x=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{14}}{2}$$

AD$=x>0$ より，

$$\mathrm{AD}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}\quad\cdots答$$

(4) 2直線 $x-2y-4=0$，$2x+y-3=0$ の交点 $(2,-1)$ が，もう1本の直線上にもあればよいから，

$$m^2\cdot 2+m\cdot(-1)-2m-9=0$$

$$\iff 2m^2-3m-9=0$$

$$\iff (m-3)(2m+3)=0$$

$$\iff m=3,\ -\frac{3}{2}\quad\cdots答$$

[2]

(1) 2，2，3，3，3，5，5の7個の数字から6桁の整数を作るとき，6桁の整数は $\boxed{20}\boxed{21}\boxed{22}$ 通りできる．また，そうして作った6桁の整数のうち，5の倍数になるものは $\boxed{23}\boxed{24}$ 通りある．

(2) 関数 $y=\sin^2x\cos x+\sin x\cos^2x+\sin x\cos x$，(ただし $0\leqq x\leqq\pi$)，において，$t=\sin x+\cos x$ とおいて y を t の式で表すとき，t の取り得る値の範囲は

$-\boxed{25}\leqq t\leqq\sqrt{\boxed{26}}$ である．また，y の最小値は $-\dfrac{\boxed{27}\boxed{28}}{\boxed{29}\boxed{30}}$ である．

(3) x の方程式 $2^{2x}-4\cdot 2^{-x}=6$ を解くために，$X=2^x$ とおいて X の方程式として表すと

$$X^{\boxed{31}}-\boxed{32}X-\boxed{33}=0$$

である．よって，$x=\log_2\left(\boxed{34}+\sqrt{\boxed{35}}\right)$ である．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，つぎを満たす．

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{3}{4},\quad a_2=3 \\ S_{n+2}-5S_{n+1}+4S_n=0 \end{cases}$$

このとき，$S_{n+1}-S_n=a_2\cdot\boxed{36}^{\,n-\boxed{37}}$ を得るので a_n を求めることができる．

よって，例えば $a_6=\boxed{38}\boxed{39}\boxed{40}$ である．

(1) 次の3つの場合を考える．

(i) 2，3，3，3，5，5を使うとき，

6桁の整数は $\dfrac{6!}{3!2!}=60$ (通り)

5の倍数は，一の位に5を固定して $\dfrac{5!}{3!}=20$ (通り)

(ii) 2，2，3，3，5，5を使うとき，

6桁の整数は $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ (通り)

5の倍数は，一の位に5を固定して $\dfrac{5!}{2!2!}=30$ (通り)

(iii) 2，2，3，3，3，5を使うとき，

6桁の整数は $\dfrac{6!}{2!3!}=60$ (通り)

5の倍数は，一の位に5を固定して $\dfrac{5!}{2!3!}=10$ (通り)

(i)〜(iii)より，

6桁の整数は $60+90+60=210$ (通り) …答

5の倍数は $20+30+10=60$ (通り) …答

(2) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であり，

$0\leqq x\leqq\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ であるから，

$$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\quad\cdots答$$

また，$t=\sin x+\cos x$ の両辺を2乗して，

$$t^2=1+2\sin x\cos x \iff \sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)$$

であるから，

$$y=\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)$$

$$=\frac{1}{2}(t^2-1)(t+1)=\frac{1}{2}(t^3+t^2-t-1)$$

したがって，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}(3t^2+2t-1)=\frac{1}{2}(t+1)(3t-1)$$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは，$t=-1$，$\dfrac{1}{3}$ のときであり，

$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲において y が最小となるのは，$t=\dfrac{1}{3}$ のときである．

その最小値は，

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)=-\frac{16}{27}\quad\cdots答$$

(3) $X=2^x$ とおくと，

$$2^{2x}-4\cdot 2^{-x}=6 \iff X^2-\frac{4}{X}=6 \iff X^3-6X-4=0\quad\cdots答$$

$$\iff (X+2)(X^2-2X-2)=0$$

$$\iff X=-2,\ 1\pm\sqrt{3}$$

$X=2^x>0$ より，$2^x=1+\sqrt{3}$ であるから，

$$x=\log_2(1+\sqrt{3})\quad\cdots答$$

(4) $S_{n+2}-5S_{n+1}+4S_n=0 \iff S_{n+2}-S_{n+1}=4(S_{n+1}-S_n)$ より，

$$S_{n+1}-S_n=(S_2-S_1)\cdot 4^{n-1}=a_2\cdot 4^{n-1}\quad\cdots答$$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ より，

$$a_{n+1}=3\cdot 4^{n-1}$$

$n=5$ を代入して，

$$a_6=3\cdot 4^4=768\quad\cdots答$$

[3]

原点 O の座標平面上に，円 $C_1: x^2+y^2=1$ と円 $C_2: (x-6)^2+(y+6)^2=3^2$ がある．動点 P_1 は円 C_1 上を，時刻 $t=0$ で点 $(1,\ 0)$ から出発し，角速度 $\frac{1}{2}\pi$ で反時計回りにまわる．一方，動点 P_2 は円 C_2 上を時刻 $t=0$ で点 $(9,\ -6)$ を出発し，角速度 $\frac{7}{10}\pi$ で時計回りにまわる．ここで，角速度とは 1 秒間に回転する角度の大きさを表すものとする．以下の問いに答えなさい．

(1) 動点 P_1 と動点 P_2 の距離が最短となるとき，P_1 の座標は

$\left(\frac{\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{42}},\ -\frac{\sqrt{\boxed{43}}}{\boxed{44}}\right)$ であり，$\overline{P_1P_2}=\boxed{45}\sqrt{\boxed{46}}-\boxed{47}$ である．

(2) 動点 P_1 と P_2 が時刻 $t=0$ で同時に出発してから，(1) の状態に初めてなるのは

$\frac{\boxed{48}\boxed{49}}{\boxed{50}}$ 秒後である．

(3) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，第 1 象限を通りかつ傾きが -1 より大きいほうを l とする．l と円 C_2 との接点を T，C_2 の中心を S とする．$\overrightarrow{SO}$ と $\overrightarrow{ST}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta=\sqrt{\boxed{51}\boxed{52}}$ である．

また，l の傾きは $\frac{-\boxed{53}+\sqrt{\boxed{54}\boxed{55}}}{\boxed{56}}$ であり，直線 $y=-x$ と l の交点の座標は $(-\boxed{57},\ \boxed{58})$ である．

(1) C_1，C_2 の中心を結ぶ線分と C_1，C_2 との交点に，P_1，P_2 がそれぞれ一致すれば，その距離が最短となる．t 秒後にそのようになると仮定すると，

$$\frac{1}{2}\pi t=\frac{7}{4}\pi+2k\pi \quad \cdots①,\qquad -\frac{7}{10}\pi t=-\frac{5}{4}\pi-2l\pi \quad \cdots②$$

と表すことができる（k，l は 0 以上の整数）．

$$① \iff t=\frac{7}{2}+4k \quad \cdots③$$

より，これを $② \iff \frac{7}{10}t=\frac{5}{4}+2l$ に代入して，

$$\frac{7}{10}\left(\frac{7}{2}+4k\right)=\frac{5}{4}+2l \iff 5l-7k=3 \quad \cdots④$$

例えば，$(k,\ l)=(1,\ 2)$ はこれを満たす．

このときの P_1 の座標は $\left(\cos\frac{7}{4}\pi,\ \sin\frac{7}{4}\pi\right)$ より，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ …答

また，

$$\overline{P_1P_2}=(C_1,\ C_2 \text{の中心間距離})-(C_1 \text{の半径})-(C_2 \text{の半径})$$
$$=6\sqrt{2}-1-3=6\sqrt{2}-4 \quad \cdots答$$

(2) $k=0$ のときは ④ を満たす整数 l は存在しないから，(1) の状態に初めてなるとき，$(k,\ l)=(1,\ 2)$ である．このとき，③ より，

$$t=\frac{7}{2}+4\cdot 1=\frac{15}{2}\ (\text{秒後}) \quad \cdots答$$

(3) C_1 の中心 O から線分 ST に垂線 OH を下ろすと，

$$\mathrm{SH}=(C_2 \text{の半径})-(C_1 \text{の半径})=3-1=2$$

したがって，$\cos\theta=\frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{OS}}=\frac{2}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ であり，

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=17$$

$\tan\theta>0$ より，$\tan\theta=\sqrt{17}$ …答

直線 l は，直線 OS（傾き -1）を $\angle\mathrm{SOH}=\frac{\pi}{2}-\theta$ だけ回転したものであるから，その傾きは，

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$
$$=\frac{1-\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}=\frac{-9+\sqrt{17}}{8} \quad \cdots答$$

直線 $y=-x$ と l の交点を U とすると，

$$\mathrm{UO}:\mathrm{US}=(C_1 \text{の半径}):(C_2 \text{の半径})=1:3$$

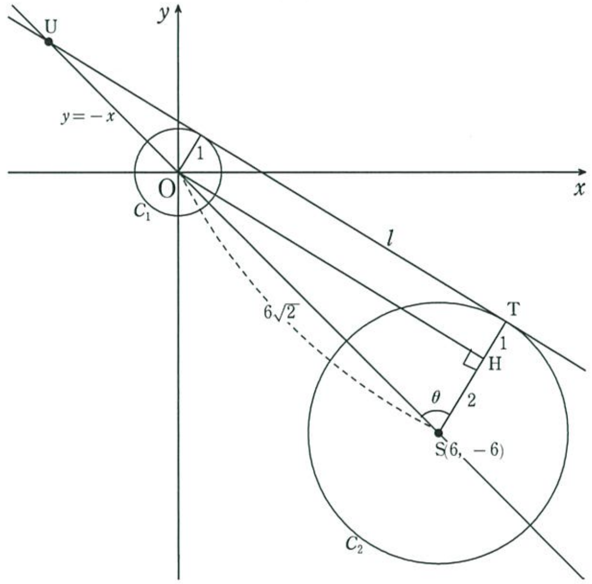
であるから，

$$\mathrm{UO}:\mathrm{OS}=1:2$$

U の x 座標を $-a\ (a>0)$ とすれば，

$$a:6=1:2 \iff a=3$$

したがって，交点 U の座標は $(-3,\ 3)$ …答



[4]

$0<r<1$ である定数 r を選び，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して関数 $f_n(x)$ をつぎで定める．

$$\begin{cases} f_n(x)=r^n\sin^3\left(r^{-n}\left\{x-\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)\pi\right\}\right),\ (a_n\leqq x\leqq b_n) \\ \text{ただし，} a_n=\frac{1-r^n}{1-r}\pi,\ b_n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\pi \end{cases}$$

また，$c_n=\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx$，（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）とおく．次の問いに答えなさい．

(1) $\int_0^\pi \sin^3 x\,dx$ を求めなさい．

(2) c_1 を求めなさい．

(3) c_n を求めなさい．

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k$ を求めなさい．

(1)
$$\int_0^\pi \sin^3 x\,dx=\int_0^\pi \sin x(1-\cos^2 x)\,dx=\left[-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi=\frac{4}{3} \quad \cdots答$$

(2)
$$a_1=\frac{1-r}{1-r}\pi=\pi,\quad b_1=\frac{1-r^2}{1-r}\pi=(1+r)\pi,$$
$$f_1(x)=r\sin^3\left\{r^{-1}\left(x-\frac{1-r}{1-r}\pi\right)\right\}=r\sin^3\{r^{-1}(x-\pi)\}$$

である．$r^{-1}(x-\pi)=t$ とおくと

$$dx=r\,dt \qquad \begin{array}{c|c} x & \pi \longrightarrow (1+r)\pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow \pi \end{array}$$

(1) の結果を用いて

$$c_1=\int_0^\pi r\sin^3 t\cdot r\,dt=r^2\int_0^\pi \sin^3 t\,dt=\frac{4}{3}r^2 \quad \cdots答$$

(3) $r^{-n}\left(x-\frac{1-r^n}{1-r}\pi\right)=t$ とおくと

$$dx=r^n\,dt \qquad \begin{array}{c|c} x & \frac{1-r^n}{1-r}\pi \longrightarrow \frac{1-r^{n+1}}{1-r}\pi \\ \hline t & 0 \longrightarrow \pi \end{array}$$

(1) の結果を用いて

$$c_n=\int_0^\pi r^n\sin^3 t\cdot r^n\,dt=r^{2n}\int_0^\pi \sin^3 t\,dt=\frac{4}{3}r^{2n} \quad \cdots答$$

(4) 求めるものは，初項 $\frac{4}{3}r^2$，公比 r^2 の無限等比級数の和であり，$0<r^2<1$ より収束するので

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k=\frac{\frac{4}{3}r^2}{1-r^2}=\frac{4r^2}{3-3r^2} \quad \cdots答$$

[5]

曲線 K

$$\begin{cases} x=2\cos t+\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t,\ (\ 0\leqq t\leqq 2\pi\ ) \end{cases}$$

について，以下の問いに答えなさい.

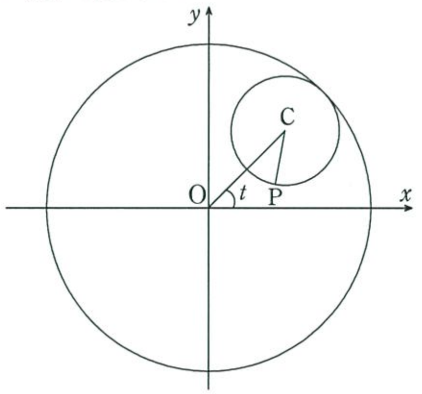
(1)　$0\leqq t\leqq \frac{2}{3}\pi$ における曲線 K の長さを求めなさい.

(2)　円 O : $x^2+y^2=3^2$ に円 C : $(x-2)^2+y^2=1$ が点 $(3,\ 0)$ で内接している. この接点における円 C 上の点を P とする. 円 C を円 O に内接させながら，すべらないように O を中心として反時計回りに回転させる. このとき，点 P が動く軌跡は上の曲線 K に一致する. その理由を説明した以下の文章の空欄を適切な数式で補いなさい. 答えはすべて解答用紙に記入しなさい.

「簡単のため，$0\leqq t\leqq \frac{1}{2}\pi$ で考える. 円 C の中心を C とするとき，線分 OC と x 軸のなす角を t とする.

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とベクトル $(1,\ 0)$ とのなす角は ((ア)) である. よって $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=($(イ), (ウ)$)$ と表せる. 一方，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=($(エ), (オ)$)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より，K に一致することがわかる. 」

(3)　曲線 K の概形を描きなさい.



(1)　$\frac{dx}{dt}=-2\sin t-2\sin 2t$，$\frac{dy}{dt}=2\cos t-2\cos 2t$ より，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4\{(\sin t+\sin 2t)^2+(\cos t-\cos 2t)^2\}$$
$$=4\{2-2(\cos 2t\cos t-\sin 2t\sin t)\}$$
$$=8\{1-\cos(2t+t)\}=8(1-\cos 3t)$$
$$=8\cdot 2\sin^2\frac{3t}{2}=16\sin^2\frac{3t}{2}$$

したがって，曲線 K の長さは，

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{3t}{2}}\,dt=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}4\sin\frac{3t}{2}\,dt=-\frac{8}{3}\left[\cos\frac{3t}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=-\frac{8}{3}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{16}{3}\quad\cdots答$$

(2)　点 $(3,\ 0)$ を A，円 C と円 O の接点を Q とすると，$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}$ より，

$\angle\mathrm{PCQ}=3t$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とベクトル $(1,0)$ のなす角は，$3t-t=2t$　…答

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が負の向きに回転することに注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(\cos(-2t),\ \sin(-2t))=(\cos 2t,\ -\sin 2t)\quad\cdots答$$

一方，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2\cos t,\ 2\sin t)\quad\cdots答$$

(3)　$x(t)=2\cos t+\cos 2t$，$y(t)=2\sin t-\sin 2t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ として，

$$x(2\pi-t)=x(t),\qquad y(2\pi-t)=-y(t)$$

が成り立つ.

よって，曲線 K の $0\leqq t\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分は，x 軸に関して対称である. そこで，一度 $0\leqq t\leqq\pi$ の範囲で考える.

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t-2\sin 2t$$
$$=-2\sin t(1+2\cos t)$$
$$\frac{dy}{dt}=2\cos t-2\cos 2t$$
$$=2(1-\cos t)(1+2\cos t)$$

$0\leqq t\leqq\pi$ のとき，$-2\sin t\leqq 0$，$2(1-\cos t)\geqq 0$であるから，次の増減表が得られる.

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$(x,\ y)$	$(3,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$	$(-1,\ 0)$

また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\cos t}{-\sin t}=-\frac{\sin t}{1+\cos t}$$

より，

$$\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=0,\qquad \lim_{t\to\frac{2}{3}\pi}\frac{dy}{dx}=-\sqrt{3}$$

さらに，

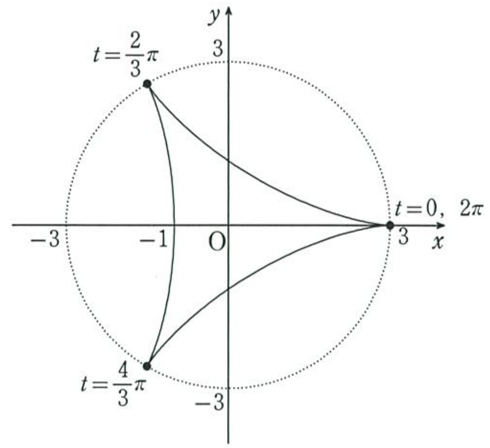
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{\cos t(1+\cos t)-\sin t\cdot(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}}{-2\sin t(1+2\cos t)}$$
$$=\frac{1}{2\sin t(1+\cos t)(1+2\cos t)}$$

より，

$0<t<\frac{2}{3}\pi$ のとき，$\frac{d^2y}{dx^2}>0$ より K は下に凸

$\frac{2}{3}\pi<t<\pi$ のとき，$\frac{d^2y}{dx^2}<0$ より K は上に凸

以上のことから，曲線 K の概形は次の図の実線部のようになる.



【講評】

[1]　基本問題の小問集合であり，落とせない。満点で通過したい。

[2]　やはり基本問題の集合であり，落とせない。こちらも満点で通過すべき設問群。

[3]　図形的に考える問題。(1) は落とせないし，(1) の状況になる場合を考えれば，(2) も解答できたと思われる。問題は (3) で，式一辺倒で解くのは大変であるから，図形的に処理をしたい。相似な図形を考えるとよいだろう。

[4]　一見すると難しそうに見える問題。(1)(2) は具体的な計算であるから，ここは落とせない。(3) は，(2) の解答で，置換を用いて解答した経験を活かして解く問題である。置換に気付けば易しいが，本番では，少し戸惑った受験生もいたのではないだろうか。
(4) は，(3) が解けていればすぐに解答できる問題であった。(2) までしか解けなかった者と，(4) まで完答した者が分かれる大問だと考えられる。

[5]　内サイクロイドの問題。同じ問題を解いたことのある経験があるか否かで，大きく分かれる問題であった。(1) は単純計算であるから，落とせない。(2) 以降は，経験の有無で，完答できたかそうでないかが決まる。日大受験生ならば，受験日までには 1 度は経験している問題だと思われる。

全体として，昨年度よりも手のつけやすいセットであった。一次突破ラインは 70 %と思われる。