1

(1) $\dfrac{12}{\sqrt{13}+1}$ の小数部分を b とする．$\dfrac{1}{b}$ の値を，分母を有理化して求めると

$\dfrac{1}{b}=\boxed{ア}$ である．

(2) k を正の定数で，$k\neq 1$ とする．関数 $f(x)=kx^2-2x-3k^2+2k+5$ の最小値が 3 であるとき，定数 k の値は $k=\boxed{イ}$ である．

(3) 1680 のすべての正の約数の和は $\boxed{ウ}$ である．

(4) 次の定積分を求めると，$\displaystyle\int_0^1 x^3(1-x^2)^8dx=\frac{1}{\boxed{エ}}$ である．ただし，$\boxed{エ}$ は整数である．

(5) 3 つの空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ において，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=\sqrt{2}$ とする．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60°，$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角が 45°，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角が 90° であるとき

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\boxed{オ}$$

である．

(6) 原点 O を中心とする半径 4 の円を C とする．円 C の外部の点を通る直線が円 C と異なる 2 点 A，B で交わるとする．PA$=8$，AB$=6$ であるとき，OP$=\boxed{カ}$ または OP$=\boxed{キ}$ である．ただし，$\boxed{カ}<\boxed{キ}$ とする．

(7) n を自然数とする．次の和を求めると

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=\boxed{ク}$$

である．次の和を求めると

$$\frac{1}{1!(2n)!}+\frac{1}{2!(2n-1)!}+\frac{1}{3!(2n-2)!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!(n+1)!}=\boxed{ケ}$$

である．

(8) 2 次方程式 $3x^2+13x+5=0$ の 2 つの解を α，β とする．p を正の実数とする．放物線 $y=\alpha x^2+px+\beta$ の準線と放物線 $y=\beta x^2+px+\alpha$ の準線が一致するとき，

$p=\boxed{コ}$ である．

解説

(1) $\dfrac{12}{\sqrt{13}+1}=\sqrt{13}-1$ より $b=\sqrt{13}-3$ だから

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=^{ア}\boxed{\frac{\sqrt{13}+3}{4}}$$

(2) $y=k\left(x-\dfrac{1}{k}\right)^2-\dfrac{1}{k}-3k^2+2k+5$ ($k>0$) の最小値が 3 だから

$$-\frac{1}{k}-3k^2+2k+5=3$$

$$(k-1)(3k^2+k-1)=0$$

k は正の定数であり，$k\neq 1$ より　　$k=^{イ}\boxed{\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}}$

(3) $1680=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ だから，求めるものは

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5)(1+7)=^{ウ}\boxed{5952}$$

(4) $1-x^2=t$ とおくと，$x^2=1-t$ で $xdx=-\dfrac{1}{2}dt$ だから

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 0$

$$\int_0^1 x^2(1-x^2)^8\cdot xdx=\int_1^0(1-t)t^8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^1(t^8-t^9)dt=^{エ}\boxed{\frac{1}{180}}$$

(5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=1$ だから

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}=25$$

$$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=^{オ}\boxed{5}$$

(6) OP$=x$ とおき，直線 OP が C と交わる点を QR とおくと，方べきの定理より

PA・PB＝PQ・PR

$8\cdot 2=(x+4)(x-4)$ または $8\cdot 14=(x+4)(x-4)$

$\therefore\ x=^{カ}\boxed{4\sqrt{2}}$，$^{キ}\boxed{8\sqrt{2}}$

(7) 二項定理から

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=(1+1)^n=^{ク}\boxed{2^n}$$

また

$$\frac{1}{1!(2n)!}+\frac{1}{2!(2n-1)!}+\frac{1}{3!(2n-2)!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!(n+1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(2n+1-k)!}=\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=1}^{n}{}_{2n+1}C_k=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{2^{2n+1}-2}{2}$$

$$=^{ケ}\boxed{\frac{2^{2n}-1}{(2n+1)!}}$$

(8) 2 次方程式 $y=ax^2+bx+c$ は $\left\{x-\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right\}^2=4\cdot\dfrac{1}{4a}\left\{y-\left(-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)\right\}$ と変形できるから，その準線は

$$y=-\frac{1}{4a}-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac+1}{4a}$$

である。よって題意より

$$-\frac{p^2-4\alpha\beta+1}{4\alpha}=-\frac{p^2-4\alpha\beta+1}{4\beta}$$

$\alpha\neq\beta$ だから

$$p^2-4\alpha\beta+1=0$$

解と係数の関係より

$$p^2=4\alpha\beta-1=4\cdot\frac{5}{3}-1=\frac{17}{3}\qquad\therefore\ p=^{コ}\boxed{\frac{\sqrt{51}}{3}}$$

2

(1) 2 種類の種 A，B がある．種 A の発芽率は 75 %，種 B の発芽率は 60 % である．

(i) 種 A を 1 粒，種 B を 2 粒花壇に植えたとき，少なくとも 1 粒が発芽する確率は $\boxed{ア}$ である．

(ii) 種 A と種 B を 1 粒ずつ花壇 X，花壇 Y，花壇 Z に植えたとき，すべての花壇で少なくとも 1 粒発芽する確率は $\boxed{イ}$ である．

(2) 2 個のさいころを同時に投げて，出た目の和が n であるとき

$$a=\sin\frac{n\pi}{2},\quad b=\sin\frac{n\pi}{3},\quad c=\sin\frac{n\pi}{4},\quad d=\sin\frac{n\pi}{6}$$

とする．

(i) $a=1$ となる確率は $\boxed{ウ}$ であり，$b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる確率は $\boxed{エ}$ である．

また，$c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる確率は $\boxed{オ}$ であり，$d=\dfrac{1}{2}$ となる確率は $\boxed{カ}$ である．

(ii) a，b，c，d のうち，少なくとも 1 つが 0 である確率は $\boxed{キ}$ である．

(iii) a，b，c，d のうち，少なくとも 1 つが負である確率は $\boxed{ク}$ である．

解説

(1) A は $\dfrac{3}{4}$ の確率で発芽し，$\dfrac{1}{4}$ の確率で発芽しない。B は $\dfrac{3}{5}$ の確率で発芽し，$\dfrac{2}{5}$ の確率で発芽しない。

(i) 「A，B ともに発芽しない」の余事象だから

$$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=^{ア}\boxed{\frac{24}{25}}$$

(ii) 各花壇で少なくとも 1 粒発芽する確率は，「A，B ともに発芽しない」の余事象だから

$$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{9}{10}\qquad\therefore\left(\frac{9}{10}\right)^3=^{イ}\boxed{\frac{729}{1000}}$$

(2) $2\leqq n\leqq 12$ であり，各々の確率は

$n=2$ のとき $\dfrac{1}{36}$，$n=3$ のとき $\dfrac{2}{36}$，$n=4$ のとき $\dfrac{3}{36}$，$n=5$ のとき $\dfrac{4}{36}$，

$n=6$ のとき $\dfrac{5}{36}$，$n=7$ のとき $\dfrac{6}{36}$，$n=8$ のとき $\dfrac{5}{36}$，$n=9$ のとき $\dfrac{4}{36}$，

$n=10$ のとき $\dfrac{3}{36}$，$n=11$ のとき $\dfrac{2}{36}$，$n=12$ のとき $\dfrac{1}{36}$

である。

(i) $a=1$ のとき $n=5$，9 だから　　$\dfrac{4+4}{36}=^{ウ}\boxed{\dfrac{2}{9}}$

$b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $n=4$，5，10，11 だから　　$\dfrac{3+4+3+2}{36}=^{エ}\boxed{\dfrac{1}{3}}$

$c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $n=3$，9，11 だから　　$\dfrac{2+4+2}{36}=^{オ}\boxed{\dfrac{2}{9}}$

$d=\frac{1}{2}$ のとき $n=5$ だから　$\frac{4}{36}=$ カ $\boxed{\frac{1}{9}}$

(ⅱ) $n=2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12$ でいずれかが 0 になるから

$$\frac{1+2+3+5+5+4+3+1}{36}=\text{キ}\ \boxed{\frac{2}{3}}$$

(ⅲ) $n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$ でいずれかが負になるから

$$\frac{2+3+4+5+6+5+4+3+2}{36}=\text{ク}\ \boxed{\frac{17}{18}}$$

3

△OAB において $OA=4$, $OB=3$, $AB=2$ とする．点 A を通り，∠OBA の二等分線と平行な直線を ℓ とする．直線 ℓ と直線 OB の交点を P とする．

(1) $\angle AOB=\theta$ とおくと，$\cos\theta=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 線分 OP の長さは $OP=$ $\boxed{\text{イ}}$ であり，線分 AP の長さは $AP=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) ∠OBA の二等分線と線分 OA の交点を A_1 とする．OA_1, A_1A の長さは

$OA_1=$ $\boxed{\text{エ}}$, $A_1A=$ $\boxed{\text{オ}}$ である．

(4) $\triangle ABA_1$ の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(5) 線分 OA 上に A_2, A_3, ……, A_n, …… が限りなく並んでいて，線分 OB 上に点 B_1, B_2, ……, B_n, …… が限りなく並んでいて，

$$OA>OA_1>OA_2>OA_3>\cdots\cdots>OA_n>\cdots\cdots$$
$$OB>OB_1>OB_2>OB_3>\cdots\cdots>OB_n>\cdots\cdots$$
$$\angle ABA_1=\angle BA_1B_1$$
$$\angle ABA_1=\angle A_nB_nA_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$
$$\angle ABA_1=\angle B_nA_{n+1}B_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であるとする．

(ⅰ) 線分 A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, ……, $A_{2n+1}A_{2n+2}$, …… の長さの総和は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(ⅱ) 線分 AB, BA_1, A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2, B_2A_3, A_3B_3, ……, A_nB_n, B_nA_{n+1}, …… の長さの総和は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(ⅲ) $\triangle ABA_1$, $\triangle A_1B_1A_2$, $\triangle A_2B_2A_3$, $\triangle A_3B_3A_4$, ……, $\triangle A_nB_nA_{n+1}$, …… の総和は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

解説

以下，$A_0=A$, $B_0=B$ として扱う。

(1) △OAB で余弦定理から

$$\cos\theta=\frac{16+9-4}{2\cdot4\cdot3}=\text{ア}\ \boxed{\frac{7}{8}}$$

(2) $BA=BP$ より　$OP=OB+BP=OB+BA=$ イ $\boxed{5}$

また，△OAP で余弦定理から

$$AP^2=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{7}{8}=6\qquad \therefore\ AP=\text{ウ}\ \boxed{\sqrt{6}}$$

(3) 内角の二等分線の定理から

$$OA_1=\frac{3}{2+3}\cdot4=\text{エ}\ \boxed{\frac{12}{5}},\quad A_1A=\frac{2}{2+3}\cdot4=\text{オ}\ \boxed{\frac{8}{5}}$$

(4) $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ だから

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore\ \triangle ABA_1=\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{2}{2+3}=\text{カ}\ \boxed{\frac{3\sqrt{15}}{10}}$$

(5)

(ⅰ) $A_{2n+1}A_{2n+2}$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$) は，初項 $\frac{24}{25}$，公比 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ の等比数列だから，無限等比級数の和を考えて

$$\frac{\frac{24}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\text{キ}\ \boxed{\frac{3}{2}}$$

(ⅱ) $A_nB_n+B_nA_{n+1}$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$) は，初項 $2+\frac{3}{5}\sqrt{6}$，公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列だから，無限等比級数の和を考えて

$$\frac{2+\frac{3}{5}\sqrt{6}}{1-\frac{3}{5}}=\text{ク}\ \boxed{5+\frac{3}{2}\sqrt{6}}$$

(ⅲ) $A_nB_nA_{n+1}$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$) は，初項 $\frac{3\sqrt{15}}{10}$，公比 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ の等比数列だから，無限等比級数の和を考えて

$$\frac{\frac{3\sqrt{15}}{10}}{1-\frac{9}{25}}=\text{ケ}\ \boxed{\frac{15\sqrt{15}}{32}}$$

【講評】

1 (7)(8) が比較的難しめであるが，それ以外は簡単であるから完答したい。基本的な問題ばかりで構成されており，落とせない。

2 こちらも基本的な問題である。前半は，「少なくとも」といわれたら余事象が使えるようにしてほしい。後半は，$2\leqq n\leqq12$ であるから，各々の確率を求めておくとよい。11 通りしかないので，数えた方が速い。

3 図形絡みの設問である。相似を見抜いて計算をするだけの問題であり，やはり落とせない。

昨年度と比べ，小問数が増加したものの，昨年度のような難しめの大問が無くなっており、全体としては得点しやすかったのではないだろうか。合格ラインは 85 % と思われる。