YMS 2017年度 解答速報 東海大学 医学部 2日目 数学

1

(1) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+7x+5}+3x\right)=\boxed{\text{ア}}$

(2) 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 個の数字から異なる 3 個の数字を選んで，3 桁の整数をつくるとき，433 より小さな偶数は $\boxed{\text{イ}}$ 個である．

(3) $\tan\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\tan\beta=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ であるとき

$$\tan(\alpha+\beta)=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{2}+\boxed{\text{エ}}\sqrt{3}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ は有理数とする．

(4) 5311 と 7379 の最大公約数は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(5) 不等式 $|2(x-1)|+|y-2|\leqq 4$ を満たす整数 x，y の組の個数は $\boxed{\text{カ}}$ 個である．

(6) 関数 $F(x)=\int_0^x(x^2+t)\sin 5t\,dt$ のとき，$F''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{\text{キ}}$ である．

(7) 複素数 $\alpha=\frac{2+\sqrt{5}i}{3}$ において，$27\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right)=a+bi$ とするとき

$$a=\boxed{\text{ク}},\quad b=\boxed{\text{ケ}}$$

である．ただし，a，b は実数，i は虚数単位とする．

(1) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ で $t\longrightarrow\infty$ だから

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+7x+5}+3x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{9t^2-7t+5}-3t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-7t+5}{\sqrt{9t^2-7t+5}+3t}={}^{\text{ア}}\boxed{-\frac{7}{6}}$$

(2) 1□0, 1□2, 1□4, 2□0, 2□4, 3□0, 3□2, 3□4 のとき □ は 4 通り，4□0, 4□2 のとき □ は 3 通りだから　$4\times8+3\times2={}^{\text{イ}}\boxed{38}$

(3)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(3\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+2)}{6-4}$$

$$={}^{\text{ウ}}\boxed{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+{}^{\text{エ}}\boxed{-\frac{1}{2}}\sqrt{3}$$

(4)

$7379=5311\times1+2068$，$5311=2068\times2+1175$，$2068=1165\times1+893$，

$1165=893\times1+282$，$893=282\times3+47$，$282=47\times6$

より，${}^{\text{オ}}\boxed{47}$

(5) $x=1$ のとき，$|y-2|\leqq4$ を満たす y は 9 個，$x=0$，2 のとき，$|y-2|\leqq2$ を満たす y は 5 個，$x=-1$，3 のとき，$|y-2|\leqq0$ を満たす y は 1 個だから

$$9+2\times5+2\times1={}^{\text{カ}}\boxed{21}$$

(6)

$$F'(x)=2x\int_0^x\sin5t\,dt+x^2\sin5x+x\sin5x$$

$$F''(x)=2\int_0^x\sin5t\,dt+(4x+1)\sin5x+5x(x+1)\cos5x$$

だから

$$F''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left[-\frac{1}{5}\cos5t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(2\pi+1)\cdot1+\frac{5}{2}\pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot0$$

$$={}^{\text{キ}}\boxed{2\pi+\frac{7}{5}}$$

(7)

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{2-\sqrt{5}i}{3},\quad\frac{1}{\alpha^2}=\frac{-1-4\sqrt{5}i}{9},\quad\frac{1}{\alpha^3}=\frac{-22-7\sqrt{5}i}{27}$$

より

$$27\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right)=27+9(2-\sqrt{5}i)+3(-1-4\sqrt{5}i)+(-22-7\sqrt{5}i)$$

$$=20-28\sqrt{5}i$$

だから

$$a={}^{\text{ク}}\boxed{20},\quad b={}^{\text{ケ}}\boxed{-28\sqrt{5}}$$

2

$\triangle$OAB において，OA=4，OB=5，AB=7 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．

(1) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $\triangle$OAB の外心を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする．ただし，s，t は実数である．

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{a}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ であるから，$\boxed{\text{イ}}s+\boxed{\text{ウ}}t+\boxed{\text{エ}}=0$ が成り立つ．

ただし，$\boxed{\text{イ}}$ は正の整数で，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ は整数である．

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ であるから，$\boxed{\text{オ}}s+\boxed{\text{カ}}t+\boxed{\text{キ}}=0$ が成り立つ．

ただし，$\boxed{\text{オ}}$ は正の整数で，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ は整数である．よって，

$$s=\boxed{\text{ク}},\quad t=\boxed{\text{ケ}}$$

である．

(3) $\triangle$OAB の垂心を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{コ}}\vec{a}+\boxed{\text{サ}}\vec{b}$$

である．

(4) $\triangle$OAB の内心を R とする．$\angle$AOB の二等分線と辺 AB の交点を C とし，$\angle$ABO の二等分線と辺 OA の交点を D とする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{シ}}\vec{a}+\boxed{\text{ス}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boxed{\text{セ}}\vec{a}$$

である．内心 R は，線分 OC と線分 BD の交点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boxed{\text{ソ}}\vec{a}+\boxed{\text{タ}}\vec{b}$$

である．

(1)

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

より

$$7^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=41-2\vec{a}\cdot\vec{b}\qquad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}={}^{\text{ア}}\boxed{-4}$$

(2)

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{a}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$$

より

$$|(s-1)\vec{a}+t\vec{b}|^2=|s\vec{a}+t\vec{b}|^2\qquad\therefore\ {}^{\text{イ}}\boxed{4}s+{}^{\text{ウ}}\boxed{-1}t+{}^{\text{エ}}\boxed{-2}=0$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$$

より

$$|s\vec{a}+(t-1)\vec{b}|^2=|s\vec{a}+t\vec{b}|^2\qquad\therefore\ {}^{\text{オ}}\boxed{8}s+{}^{\text{カ}}\boxed{-50}t+{}^{\text{キ}}\boxed{25}=0$$

これらを連立すると　$s={}^{\text{ク}}\boxed{\frac{125}{192}}$，$t={}^{\text{ケ}}\boxed{\frac{29}{48}}$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x\vec{a}+y\vec{b}$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\vec{a}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\vec{b}=x\vec{a}+(y-1)\vec{b}$ だから

$$(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\vec{a})\cdot\vec{b}=-4x+25y+4=0$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\vec{b})\cdot\vec{a}=16x-4y+4=0$$

これらを連立すると　$x=-\frac{29}{96}$，$y=-\frac{5}{24}$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}={}^{\text{コ}}\boxed{-\frac{29}{96}}\vec{a}+{}^{\text{サ}}\boxed{-\frac{5}{24}}\vec{b}$$

(4) 内角の二等分線の性質より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5\vec{a}+4\vec{b}}{4+5}={}^{\text{シ}}\boxed{\frac{5}{9}}\vec{a}+{}^{\text{ス}}\boxed{\frac{4}{9}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{5}{5+7}\vec{a}={}^{\text{セ}}\boxed{\frac{5}{12}}\vec{a}$$

メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}=1\quad\text{より}\quad\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{5}=1\qquad\therefore\ \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{RC}}=\frac{9}{7}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{9}{9+7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}={}^{\text{ソ}}\boxed{\frac{5}{16}}\vec{a}+{}^{\text{タ}}\boxed{\frac{1}{4}}\vec{b}$$

3

$f(x)=x^3-6x^2+8x+16$ とする．曲線 C_1 : $y=f(x)$ と放物線 C_2 : $y=x^2$ を考える．

(1) 曲線 C_1 と放物線 C_2 の共有点の x 座標は 4 と $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 曲線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) 曲線 C_1 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ウ}}\right)x+\left(\boxed{\text{エ}}\right)$$

である．ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ は t についての整式である．

この接線と放物線 C_2 の共有点の x 座標は方程式

$$x^2-\left(\boxed{\text{ウ}}\right)x-\left(\boxed{\text{エ}}\right)=0$$

の解である．この 2 次方程式の判別式を $D(t)$ とする．

(4) $D(t)$ は $t=\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ で極値をとる．ただし，

$\boxed{\text{オ}}<\boxed{\text{カ}}<\boxed{\text{キ}}$ とする．

(5) $\boxed{}<t<4$ とする．曲線 C_1 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線と放物線 C_2 で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．$(6\times S(t))^{\frac{2}{3}}$ の極大値は $\boxed{\text{ク}}$，極小値は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{27}$ である．

ただし，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ は整数である．

(1)

$$x^3-6x+8x+16=x^2$$

$$x^3-7x^2+8x+16=0\quad(x-4)^2(x+1)=0\qquad\therefore\ x=4,\ {}^{\text{ア}}\boxed{-1}$$

(2)

$$\int_{-1}^4\{f(x)-x^2\}dx=\int_{-1}^4(x-4)^2(x+1)dx=\int_{-1}^4(x-4)^2\{(x-4)+5\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-4)^4}{4}+\frac{5}{3}(x-4)^3\right]_{-1}^4={}^{\text{イ}}\boxed{\frac{625}{12}}$$

(3)

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)=\left({}^{\text{ウ}}\boxed{3t^2-12t+8}\right)x+\left({}^{\text{エ}}\boxed{-2t^3+6t^2+16}\right)$$

これと C_2 を連立すると

$$x^2=(3t^2-12t+8)x-2t^3+6t^2+16$$

$$\therefore\ x^2-(3t^2-12t+8)x+2t^3-6t^2-16=0\ \cdots\cdots(*)$$

であるから

$$D(t)=(3t^2-12t+8)^2-4(2t^3-6t^2-16)$$

(4) $$D'(t)=2(3t^2-12t+8)(6t-12)-4(6t^2-12t)$$

$$=12(3t-2)(t-2)(t-4)$$

$t=$ オ $\boxed{\frac{2}{3}}$，カ $\boxed{2}$，キ $\boxed{4}$ の前後で符号が変わるから，これらで極値をとる。

(5) 接線を ℓ とおき，$(*)$ の 2 解を $x=\alpha,\ \beta$ とすると

$$S(t)=\int_\alpha^\beta(\ell-x^2)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$\therefore\ (6\times S(t))^{\frac{2}{3}}=(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$(*)$ で解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=3t^2-12t+8,\ \alpha\beta=2t^3-6t^2-16$$

よって

$$(6\times S(t))^{\frac{2}{3}}=(3t^2-12t+8)^2-4(2t^3-6t^2-16)=g(t)$$

とおくと

$$g'(t)=2(3t^2-12t+8)(6t-12)-4(6t^2-12t)$$

$$=12(3t-2)(t-2)(t-4)$$

$t=\frac{2}{3}$ の前後で $g'(t)$ の符号が負から正に変わるから，このときに極小値をとり，$t=2$ の前後で $g'(t)$ の符号が正から負に変わるから，このときに極大値をとる。よって

$$g(2)=(12-24+8)^2-4(16-24-16)=\text{ク}\ \boxed{112}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}-8+8\right)^2-4\left(\frac{16}{27}-\frac{8}{3}-16\right)=\frac{\text{ケ}\ \boxed{2000}}{27}$$

【講評】

1 （小問）基本問題が多いので落とせない。(4)は新課程を意識した出題か。(7)はいろいろ工夫したくなる問題であるが、解答では直接計算してみた。

2 （ベクトル）誘導が丁寧であるが、外心や内心の求め方が授業などで教わった方法と違うかも知れない。柔軟に対応したい。

3 （微積分）設問が多く、計算量も多いので厄介である。面積の計算では

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\quad や\quad \int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$$

が登場する。（公式を覚えていなければ部分積分をすればよい）

途中で現れる $D(t)$ が $S(t)$ に現れるのはうまい。この誘導の流れをつかめたが分かれ目になるだろう。

全体を通して計算量が多く、センター試験のように桁がわからない形式なので計算ミスに気づき辛い。1つ1つの計算を丁寧にやり、見直しをする余裕がほしいところ。難問や奇問は出ていないので、基礎～標準レベルの問題を演習し計算力をつけてほしい。他科目にもよるが7割取れれば勝負になるのではないか。