

# YMS 2017年度 解答速報

## 東京女子医科大学

解答速報はYMSWEBにも掲載しています!

※ 解答速報の問題は受験者からの聞き取りをして、作成しています。  
 ※ 解答は聞き取った問題に対するものであることを、予めご了承ください。

<http://www.yms.ne.jp/>

- 1)  $f(x)=4ax-x^2, g(x)=\frac{a^2}{3}x^2$  とする。ただし、 $a>0$  とする。 $y=f(x)$  と  $y=g(x)$  の交点を  $P_1, P_2 (P_1 < P_2)$  とし、囲まれた面積を  $h(a)$  とするとき、以下の問いに答えよ。
- (1)  $P_1, P_2$  の座標を求めよ。  
 (2)  $h(a)$  の最大値とそのときの  $a$  の値を求めよ。

(1)  $y=f(x)$  と  $y=g(x)$  を連立すると

$$4ax - x^2 = \frac{a^2}{3}x^2$$

$$x\left(\frac{a^2+3}{3}x - 4a\right) = 0 \quad \therefore x=0, \frac{12a}{a^2+3}$$

この順に  $y=0, \frac{48a^4}{(a^2+3)^2}$  となるので

$$P_1(0, 0), P_2\left(\frac{12a}{a^2+3}, \frac{48a^4}{(a^2+3)^2}\right)$$

$$(2) \quad h(a) = \int_0^{\frac{12a}{a^2+3}} (f(x) - g(x)) dx = -\int_0^{\frac{12a}{a^2+3}} \frac{a^2+3}{3}x\left(x - \frac{12a}{a^2+3}\right) dx$$

$$= -\frac{a^2+3}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{12a}{a^2+3}\right)^3$$

$$= \frac{96a^3}{(a^2+3)^2}$$

$$h'(a) = 96 \cdot \frac{3a^2(a^2+3)^2 - a^3 \cdot 2(a^2+3) \cdot 2a}{(a^2+3)^4} = \frac{96(9-a^2)}{(a^2+3)^3} a^2$$

$a$	(0)	...	3	...
$h'(a)$		+	0	-
$h(a)$		↗		↘

増減表より、 $a=3$  のとき最大値  $h(3)=18$  をとる。

2) 係数が実数の3次方程式  $x^3+ax^2+bx+a^2=0$  の解が  $\alpha, \alpha+\beta i, \alpha-\beta i$  (ただし、 $i$  は虚数単位とし、 $\alpha, \beta$  は0以外の実数) とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a, b, a^2$  を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。  
 (2)  $a, b$  の満たす条件を  $(a, b)$  平面に図示せよ。

(1) 解と係数の関係より

$$\alpha + (\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = -a$$

$$\alpha(\alpha + \beta i) + (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) + (\alpha - \beta i)\alpha = b$$

$$\alpha(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = -a^2$$

$$\therefore a = -3\alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b = 3\alpha^2 + \beta^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a^2 = -\alpha(\alpha^2 + \beta^2) \quad \dots \textcircled{3}$$

(2) ①より  $\alpha = -\frac{1}{3}a$  として ②③へ代入する

$$\alpha \neq 0 \text{ より } a \neq 0$$

であることに注意して

$$\begin{cases} b = \frac{1}{3}a^2 + \beta^2 \quad \dots \textcircled{2}' \\ a^2 = \frac{1}{3}a\left(\frac{1}{9}a^2 + \beta^2\right) \quad \dots \textcircled{3}' \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

②'を  $\beta^2 = b - \frac{1}{3}a^2$  として ③'へ代入する

$$\beta \neq 0 \text{ より } \beta^2 > 0 \text{ である}$$

$$\beta^2 = b - \frac{1}{3}a^2 > 0 \quad \dots \textcircled{2}''$$

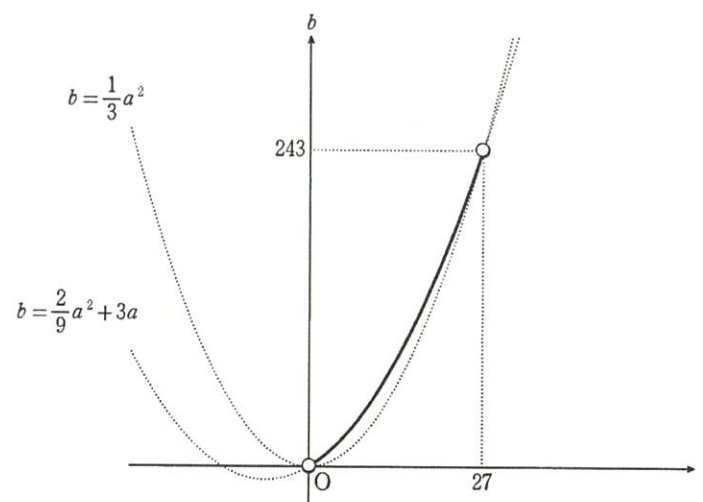
③'は

$$a^2 = \frac{1}{3}a\left(\frac{1}{9}a^2 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)\right)$$

$a \neq 0$  より

$$a = \frac{1}{3}\left(b - \frac{2}{9}a^2\right) \Leftrightarrow b = \frac{2}{9}a^2 + 3a \quad \dots \textcircled{3}''$$

以上より求める  $a, b$  の条件は ②'' かつ ③'' であり、図は次のようになる。



YMS 勝利への 大逆転講座

医大別直前講習会

申し込み受付中!

二次試験対策講座

申し込み受付中!

慈恵最終  
2/3(金)

日大最終  
2/6(月)

順天堂 般  
1/26(木)17:45~

日医 前  
1/31(火)17:45~

女子医  
2/5(日)17:45~

詳細はホームページをご覧ください。お電話にてお問い合わせください。

医学部専門予備校 03-3370-0410

YMS www.yms.ne.jp 東京都渋谷区代々木1-37-14

3  $\frac{n^2}{m} + \frac{m}{n} = 8$  を満たす自然数  $(m, n)$  をすべて求めよ。

$$\frac{n^2}{m} + \frac{m}{n} = 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8nm + n^3 = 0$$

解の公式より

$$m = 4n \pm n\sqrt{16-n}$$

となるので、 $m$  が自然数になる条件は

$$1 \leq n \leq 16 \quad \text{かつ} \quad 16-n \text{ が平方数}$$

であるので、

$$n = 7, 12, 15, 16$$

$$n = 7 \text{ のとき } m = 28 \pm 7\sqrt{9} = 7, 49$$

$$n = 12 \text{ のとき } m = 48 \pm 12\sqrt{4} = 24, 72$$

$$n = 15 \text{ のとき } m = 60 \pm 15\sqrt{1} = 45, 75$$

$$n = 16 \text{ のとき } m = 64$$

これらはすべて①をみたす。

以上により求める自然数の組  $(m, n)$  は

$$(m, n) = (7, 7), (7, 49), (12, 24), (12, 72)$$

$$(15, 45), (15, 75), (16, 64)$$

の7組。

4 表と裏の出る確率の等しいコインがある。 $z_0 = \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$  とし、コインを投げて表が出

たら  $|z_0|$ 、裏が出たら  $\frac{z_0}{|z_0|}$  をかける。かけた回数を  $n$  としたとき、 $z_n$  と書くことにする

最初、複素数平面上で  $z$  は  $z_0$  の位置にいるものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) コインを5回投げて  $|z_5| \geq 4$  になるときの確率を求めよ。
- (2) コインを10回投げて  $\frac{5}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi$  になるときの確率を求めよ。
- (3) コインを15回投げて  $z_{15}$  の虚部が負かつ  $|z_{15}| \geq 15$  になるときの確率を求めよ。

題意より

$$z_0 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$|z_0| = \sqrt{2}, \quad \frac{z_0}{|z_0|} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

- (1) 表が  $k$  回、裏が  $5-k$  回であるとする。 $(k=0, 1, 2, \dots, 5)$

$|z_5| \geq 4$  となる条件は

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^k \cdot 1^{5-k} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow k \geq 3$$

したがって求める確率は

$$\frac{{}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5}{2^5} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

- (2) 表が  $10-k$  回、裏が  $k$  回であるとする。 $(k=0, 1, 2, \dots, 10)$

$n$  を整数とすると

$$\frac{5}{4}\pi + 2n\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k \leq \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{4} + 6n \leq k + 1 \leq \frac{9}{2} + 6n$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{4} + 6n \leq k \leq \frac{7}{2} + 6n$$

$0 \leq k \leq 10$  に注意して

$$n=0 \text{ のとき } \frac{11}{4} \leq k \leq \frac{7}{2} \text{ より } k=3$$

$$n=1 \text{ のとき } \frac{35}{4} \leq k \leq \frac{19}{2} \text{ より } k=9$$

したがって求める確率は

$$\frac{{}_{10}C_3 + {}_{10}C_9}{2^{10}} = \frac{65}{512}$$

- (3) 表が  $15-k$  回、裏が  $k$  回であるとする。 $(k=0, 1, 2, \dots, 15)$

$|z_{15}| \geq 15$  となる条件は

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{15-k} \geq 15$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^{16-k} \geq (\sqrt{2})^9 > 15$$

$$\text{より } 16-k \geq 8 \quad \therefore k \leq 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $z_{15}$  の虚部が負である条件は(2)と同様に

$$\pi + 2n\pi < \frac{k+1}{3}\pi < 2\pi + 2n\pi$$

$$\Leftrightarrow 2+6n < k < 5+6n$$

$$n=0 \text{ のとき } 2 < k < 5 \text{ より } k=3, 4$$

$$n=1 \text{ のとき } 8 < k < 11 \text{ より } k=9, 10$$

$$n=2 \text{ のとき } 14 < k < 17 \text{ より } k=15$$

①より  $k=3, 4$  であればよい。

したがって求める確率は

$$\frac{{}_{15}C_3 + {}_{15}C_4}{2^{15}} = \frac{455}{8192}$$

(講評)

昨年に比べ大幅に難化した。大問①は1/6公式を用いればいいが、 $a$ の分数関数になるため微分計算が必要となる。最後まで解き切るのは大変である。

大問②は解と係数の関係を用いたあと文字を消去して図示するだけなのだが、 $\alpha, \beta$ を消去するときの変域に注意する必要がある。

大問③は整数問題で、 $n$ のとりうる範囲を絞ればよい。単純に $m$ の2次方程式とみて解の公式で解けば先が見えるのだが、これが意外と難しく解けた人は少数だろう。

大問④は意味を読み取れば決して難しくはない。が、状況がつかめなかった人も多かったろう。また、(2)(3)に進むにつれ計算が大変なので、本当にこれであって不安になった人もいるはず。

6割が目標となるが、仮に届かなかったとしても他教科の出来次第では十分チャンスがあるだろう。

**国際医療福祉大医** **解答配布中!**

**埼玉医大(前)** **金沢医大** **岩手医大**

数学の入試問題を再現して解答を作成しています。

**ご希望の方は YMS 受付窓口まで直接お越しください。**

※発送等は行っておりません。窓口のみでの取り扱いとなっております。  
※問題はあくまでも受験者からの聞き取りで作成しているため、解答も聞き取った問題に対するものであることを予めご了承ください。

医学部専門予備校 〒151-0053 東京都渋谷区代々木1-37-14

**YMS**

ホームページ <http://www.yms.ne.jp/>

ご不明な点はお電話にてお問い合わせください。

**TEL 03-3370-0410**