Ⅰ．

(ⅰ)

解と係数の関係より$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=4\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1\\ \alpha\beta\gamma=3\end{cases}$

$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=8-16+2-3=-9$ …（１）

$$\begin{aligned}a&=-\left(\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\beta}+\frac{1}{2-\gamma}\right)\\&=-\frac{(2-\beta)(2-\gamma)+(2-\alpha)(2-\gamma)+(2-\alpha)(2-\beta)}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}\\&=-\frac{12-4(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}\\&=-\frac{12-16+1}{-9}=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$b=\frac{1}{2-\alpha}\cdot\frac{1}{2-\beta}+\frac{1}{2-\beta}\cdot\frac{1}{2-\gamma}+\frac{1}{2-\gamma}\cdot\frac{1}{2-\alpha}=\frac{2-\gamma+2-\alpha+2-\beta}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}=-\frac{2}{9}$$

$$c=-\frac{1}{2-\alpha}\cdot\frac{1}{2-\beta}\cdot\frac{1}{2-\gamma}=\frac{-1}{(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)}=\frac{1}{9}$$

$\therefore\ a+b+c=-\frac{4}{9}$ …（２）

(ⅱ)

$A=Gm,\ B=Gn$ （$m,\ n$は$m<n$となる互いに素な自然数）

$L^2-AB=1680$

$G^2m^2n^2-G^2mn=1680$

$\Leftrightarrow G^2mn(mn-1)=2^4\times3\times5\times7$

$\therefore\ G^2=1,\ 2^2,\ 2^4$

$mn,\ mn-1$は偶奇が異なることに注意して

$G^2=1,\ 2^4$のときは，mnが存在しないので不適

$\therefore\ G^2=2^2\qquad\therefore\ G=2$ …（３）

$\therefore\ (mn,\ mn-1)=(3\times7,\ 2^2\times5)=(21,\ 20)\qquad\therefore\ mn=21$

$m<n$から　$(m,\ n)=(1,\ 21)(3,\ 7)\qquad\therefore\ (A,\ B)=(2,\ 42)(6,\ 14)$ …（４）

(ⅲ)

空き箱があってもよいとき，白玉の入れ方は${}_7\mathrm{C}_2=21$通り

空き箱があってもよいとき，黒玉の入れ方は${}_6\mathrm{C}_2=15$通り

よって，空き箱があってもよいときの分け方の総数は$21\times15=315$通り…（５）

次に，（５）のうち，２箱空き箱ができるときの分け方は３通り

１箱だけ空き箱ができるときの分け方は，例えば赤色の箱だけ空き箱になるときを考えると，

青色と黄色の2箱に玉を入れる方法は${}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1 - 2 = 28$通りだから，

空き箱がでてはいけないときの分け方の総数は$315 - 3 - 28 \times 3 = 228$通り…（６）

Ⅱ．

(ⅰ)

$0 \leqq t < \frac{1}{2},\ t = 1$ …（１）

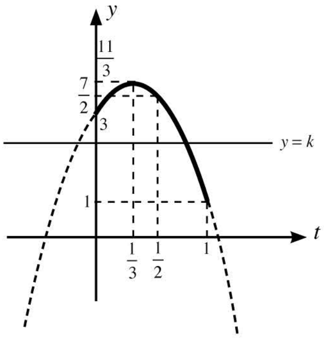
$3\cos 2x + 4\sin x - k = 0$

$\Leftrightarrow\ 3(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin x - k = 0$

$\Leftrightarrow\ k = -6\sin^2 x + 4\sin x + 3$

と変形する。$\sin x = t\ (0 \leqq t \leqq 1)$とおいて，$y = k$と$y = -6t^2 + 4t + 3$の交点を考える。

ここで，



$0 \leqq t < \frac{1}{2},\ t = 1$となる$t$に対して，$x$は1個存在する。

$\frac{1}{2} \leqq t < 1$となるtに対して，xは2個存在する。

$y = -6t^2 + 4t + 3 = -6\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$から，

図より，$1 < k < 3,\ \frac{7}{2} < k < \frac{11}{3}$ …（２）

(ⅱ)

分母が20の分数を次のように並べる

$\frac{20m+1}{20},\ \frac{20m+2}{20},\ \frac{20m+3}{20},\ \cdots\cdots,\ \frac{20n-2}{20},\ \frac{20n-1}{20}$ ……①

これら$20n - 20m - 1$個の分数のうち

分子が2の倍数は$10n - 10m - 1$個

分子が5の倍数は$4n - 4m - 1$個

分子が10の倍数は$2n - 2m - 1$個

よって，分子が2の倍数でも、5の倍数でもない整数の個数は

$20n - 20m - 1 - \{(4n - 4m - 1) + (10n - 10m - 1) - (2n - 2m - 1)\} = 8n - 8m$個…（３）

また，

①の分子の和は$\frac{1}{2}(20m + 20n)(20n - 20m - 1) = 10(m + n)(20n - 20m - 1)$

①の分子のうち，2の倍数の整数の和は$\frac{1}{2}(20m + 20n)(10n - 10m - 1) = 10(m + n)(10n - 10m - 1)$

①の分子のうち，5の倍数の整数の和は$\frac{1}{2}(20m + 20n)(4n - 4m - 1) = 10(m + n)(4n - 4m - 1)$

①の分子のうち，10の倍数の整数の和は$\frac{1}{2}(20m + 20n)(2n - 2m - 1) = 10(m + n)(2n - 2m - 1)$

よって，M の要素の和は

$$\frac{1}{20}\left\{10(m+n)(20n-20m-1)-10(m+n)(10n-10m-1)-10(m+n)(4n-4m-1)+10(m+n)(2n-2m-1)\right\}$$
$$=4\left(n^2-m^2\right)\ \cdots\ (4)$$

Ⅲ.

(i)

バウムクーヘン積分を考えると，

$$V(t)=2\pi\int_0^t x\log(x+1)\,dx-2\pi\int_1^t x\log x\,dx$$

ここで，

$$\int_0^t x\log(x+1)\,dx$$
$$=\int_0^t (x+1)\log(x+1)\,dx-\int_0^t \log(x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)\right]_0^t-\int_0^t\frac{1}{2}(x+1)\,dx-\left[(x+1)\log(x+1)-x\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{2}(t+1)^2\log(t+1)-\frac{1}{4}\left(t^2+2t\right)-(t+1)\log(t+1)+t$$

$$\int_1^t x\log x\,dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^t-\int_1^t\frac{x}{2}\,dx$$
$$=\frac{t^2}{2}\log t-\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}$$

以上より，$V(t)=2\pi\left\{\frac{t^2-1}{2}\log(t+1)-\frac{t^2}{2}\log t-\frac{1}{4}+\frac{t}{2}\right\}$ ……（答）

(ii)

$$V'(t)=2\pi\left\{t\log(t+1)+\frac{t-1}{2}-t\log t-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right\}$$
$$=2\pi t\log\frac{t+1}{t}$$
$$=2\pi\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

よって，$\lim_{t\to\infty}V'(t)=2\pi\log e=2\pi$ ……（答）