[Ⅰ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．また設問(3)(ⅱ)に答えなさい．

(1)　不等式

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x \leqq 7\left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$$

を満たす実数 x の範囲を不等式で表すと $\boxed{（あ）}$ である．

(2)　1 以上 100 以下のすべての自然数の集合を U とする．U の部分集合 A および B を
$A=\{n \mid n\in U$ かつ n を 5 で割ると 2 余る$\}$，$B=\{n \mid n\in U$ かつ n を 7 で割ると 1 余る$\}$
と定めるとき，集合 $A\cup B$ に属する自然数の総和は $\boxed{（い）}$ である．

(3)　与えられた n 個の実数 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ に対して，関数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-x_i|$$

を考える．

（ⅰ）　$f(x)$ は x の連続関数であり，各々の開区間 $(x_{i-1},\ x_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$ において微分可能である．ただし，$x_0=-\infty$，$x_{n+1}=\infty$ とおく．区間 $(x_{i-1},\ x_i)$ において $f(x)$ を微分すると，$f'(x)=\boxed{（う）}$ である．

（ⅱ）　ある実験において計測を n 回繰り返し行って，$x_1<x_2<\cdots<x_n$ を得た．これらのデータの中央値を m とするとき，関数 $f(x)$ は $x=m$ において最小値をとることを示しなさい．

(1)　$\left(\frac{1}{2}\right)^x=X$ とおくと，$X>0$ である．このとき，

$$X^3 \leqq 7X-6$$
$$\Longleftrightarrow\ (X+3)(X-1)(X-2)\leqq 0$$
$$\Longleftrightarrow\ X\leqq -3,\ 1\leqq X\leqq 2$$

よって，$X>0$ より，$1\leqq X\leqq 2$ であり，

$$1\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 2$$
$$\Longleftrightarrow\ -1\leqq x\leqq 0\quad \cdots 答$$

(2)

$$A=\{5k-3 \mid k=1,\ 2,\ \cdots,\ 20\},\ B=\{7k-6 \mid k=1,\ 2,\ \cdots,\ 15\}$$

と表せる．このとき，

$$A\cap B=\{35k-13 \mid k=1,\ 2,\ 3\}$$

である．求める自然数の総和は，

（A に属する自然数の総和）＋（B に属する自然数の総和）
　－（$A\cap B$ に属する自然数の総和）

$$=\frac{20}{2}(2+97)+\frac{15}{2}(1+99)-\frac{3}{2}(22+92)$$
$$=1569\quad \cdots 答$$

(3)

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-x_i|$$

（ⅰ）　開区間 $(x_{i-1},\ x_i)$ において，

$$|x-x_k|=\begin{cases}x-x_k & (k=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1)\\ -x+x_k & (k=i,\ i+1,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

となる．ゆえに

$$f(x)=\sum_{k=1}^{i-1}(x-x_k)+\sum_{k=i}^{n}(-x+x_k)$$
$$=(i-1)x-\sum_{k=1}^{i-1}x_k-(n-i+1)x+\sum_{k=i}^{n}x_k$$
$$=(-n+2i-2)x-\sum_{k=1}^{i-1}x_k+\sum_{k=i}^{n}x_k$$

よって，

$$f'(x)=-n+2i-2\quad \cdots 答$$

（ⅱ）

（ア）　$n=2l$ のとき，中央値 $m=x_l=x_{l+1}$ である．また，

$$f'(x)=-2l+2i-2$$

となるので，

$$\begin{cases}i<l \text{ のとき } f'(x)<0\\ i=l \text{ のとき } f'(x)=0\\ i>l \text{ のとき } f'(x)>0\end{cases}$$

となる．

x	x_0	$\cdots$	x_1	$\cdots$		$\cdots$	x_{l-1}	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_{l+1}	$\cdots$		$\cdots$	x_{n+1}
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		0		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		↘		↘		↘		→		↗		↗		↗	

よって，$x_{l+1}\leqq x\leqq x_l$ のすべての x において最小値をとる．

（イ）　$n=2l-1$ のとき，中央値は $m=x_l$ である．また，

$$f'(x)=-(2l-1)+2i-2=2i-2l-1$$

となるので，

$$\begin{cases}i\leqq l \text{ のとき } f'(x)<0\\ i>l \text{ のとき } f'(x)>0\end{cases}$$

となる．

x	x_0	$\cdots$	x_1	$\cdots$		$\cdots$	x_{l-1}	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_{l+1}	$\cdots$		$\cdots$	x_{n+1}
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		↘		↘		↘		↘		↗		↗		↗	

よって，$x=x_l$ おいて最小値をとる．

（ア）（イ）より，$x=m$ で最小値をとる．終

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

袋が1つと赤玉，白玉がそれぞれ3個ずつ用意されている．袋の中に玉が3個入った状態に対して，以下の操作Tを考える．

操作T
(T1)　袋の中から無作為に球を2個取り出す．
(T2)　(a) 取り出した2個の玉の色が異なる場合は，取り出した2個の玉をそのまま袋に戻す．
(b) 取り出した2個の玉の色が同じ場合は，その色と異なる色の玉を2個袋の中に入れる．

ここで次の2つの状態を考える．

状態A：袋の中に赤玉2個と白玉1個が入っている状態
状態B：袋の中に白玉3個のみが入っている状態

以下 n を自然数とし，状態Aから始めて操作Tを繰り返し行う．

(1)　n 回の操作を繰り返し終えたとき状態Aである確率を p_n とすると，$p_1=\boxed{（あ）}$ であり，一般に $p_n=\boxed{（い）}$ である．

(2)　n 回の操作を終えるまでに状態Bが1回だけ起こる確率を q_n とすると，$q_4=\boxed{（う）}$ であり，一般に $q_n=\boxed{（え）}$ である．

(3)　n 回の操作を終えるまでに状態Bがちょうど2回起こる確率を r_n とすると，$r_4=\boxed{（お）}$ であり，一般に $n\geqq3$ のとき $r_n=\boxed{（か）}$ である．

1回の試行において，

状態Aから状態Aになる確率：$\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_1C_1}{{}_3C_2}=\dfrac{2}{3}$

状態Aから状態Bになる確率：$\dfrac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\dfrac{1}{3}$

状態Bから状態Aになる確率：1

である．

(1)　1回目の試行で再び状態Aとなる確率は

$$p_1=\frac{2}{3}\quad\cdots\text{答}$$

また，n 回目を終えた状態から，$n+1$ 回目を終えた状態への遷移を考えると，

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{2}{3}+(1-p_n)\times1$$

$$\iff p_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{3}{4}\right)$$

ここで，$p_0=1$ として考えると，

$$p_n-\frac{3}{4}=\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\iff p_n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{4}\quad\cdots\text{答}$$

(2)　状態Bが何回目の試行後に起こるかで場合分けして考える．

（i）　状態Bが1回目の試行後 ～ $n-1$ 回目の試行後のいずれかで起こるとき

$${}_{n-1}C_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1$$

（ii）　状態Bが n 回目の試行後に起こるとき

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$$

よって，（i）（ii）より

$$q_n={}_{n-1}C_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}\cdot1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{(3n-1)\cdot2^{n-2}}{3^n}\quad\cdots\text{答}$$

また，$q_4=\dfrac{44}{81}$ である．　…答

(3)　2回目の状態Bが何回目の試行後に起こるかで場合分けして考える．

（i）　2回目の状態Bが2回目の試行後 ～ $n-1$ 回目の試行後のいずれかで起こるとき

$${}_{n-2}C_2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot1^2$$

（ii）　2回目の状態Bが n 回目の試行後に起こるとき

$${}_{n-2}C_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot1$$

よって，（i）（ii）より

$$r_n={}_{n-2}C_2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot1^2+{}_{n-2}C_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot1$$

$$=\frac{(n-2)(3n-5)\cdot2^{n-5}}{3^{n-1}}\quad\cdots\text{答}$$

また，$r_4=\dfrac{7}{27}$ である．　…答

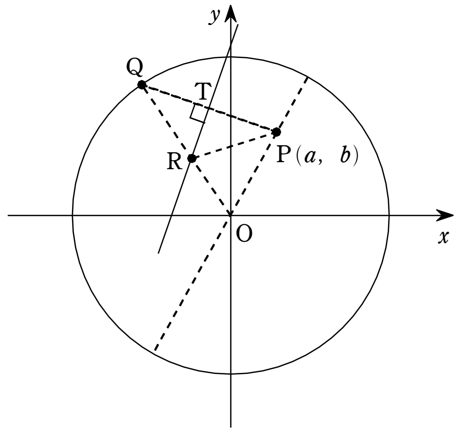
[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

座標平面における円 $x^2+y^x=4$ を C とし，C の内側にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を1つ固定する．C 上に点Qをとり，線分QPの垂直二等分線とOQとの交点をRとする．ただしOは座標原点である．点Qが円 C 上を一周するとき，点Rが描く軌跡を $S(a,\ b)$ とする．

(1)　$S(a,\ b)$ は長軸の長さ $\boxed{(あ)}$，短軸の長さ $\boxed{(い)}$ の楕円である．点Rの x 座標と y 座標をそれぞれ $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（ただし $r>0$ かつ $0\leqq\theta<2\pi$）とすると，$S(1,\ 1)$ の方程式は $r=\boxed{(う)}$ と表される．$S(1,\ 1)$ 上の点で y 座標が最大となる点の座標を $(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$ とすると $r_0=\boxed{(え)}$，$\theta_0=\boxed{(お)}$ である．

(2)　t を $0<t<2$ の範囲で動かすとき，$S(t,\ 0)$ が通過してできる領域の面積は $\boxed{(か)}$ である．



(1)　$\mathrm{OQ}=2$ であり，上図のように点をとるとき $\triangle\mathrm{RPT}\equiv\triangle\mathrm{RQT}$ である．よって

$$\mathrm{PR}=\mathrm{QR}$$

したがって，

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}+\mathrm{RQ}=\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=2$$

点Rは，2定点O，Pからの距離の和が一定（$=2$）なので，2点O，Pを焦点とする楕円である．このとき，長軸の長さ $2m=2$ …答

また焦点間の距離が $2l=\sqrt{a^2+b^2}$ となることから，短軸の長さ $2n$ は

$$m^2=l^2+n^2,\ n>0 \iff 2n=\sqrt{4m^2-4l^2}=\sqrt{4-a^2-b^2}\quad\cdots答$$

次に $S(1,\ 1)$ について考える．

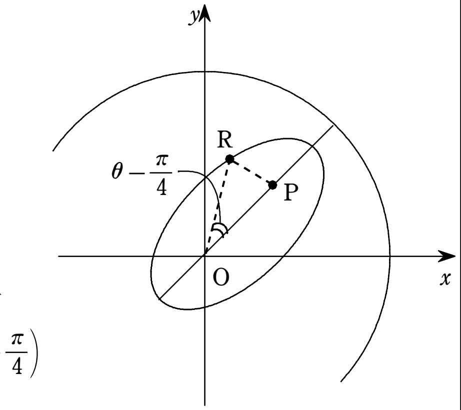
右図において，

$\mathrm{OP}=\sqrt{2}$

$\mathrm{OR}=r$

$\mathrm{PR}=2-r$

$\angle\mathrm{POR}=\theta-\dfrac{\pi}{4}$



となるので，△OPRで余弦定理を用いて

$$(2-r)^2=r^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot r\cdot\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\iff r=\frac{1}{2-\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\quad\cdots答$$

また，このとき

$$y=r\sin\theta=\frac{\sin\theta}{2-\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{2\cos\theta-1}{\left\{2-\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2}$$

となるので，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき極大かつ最大となる．

$$r_0=\frac{3+\sqrt{3}}{3},\quad \theta_0=\frac{\pi}{3}\quad\cdots答$$

(2)　点Pが $(t,\ 0)$ のとき，

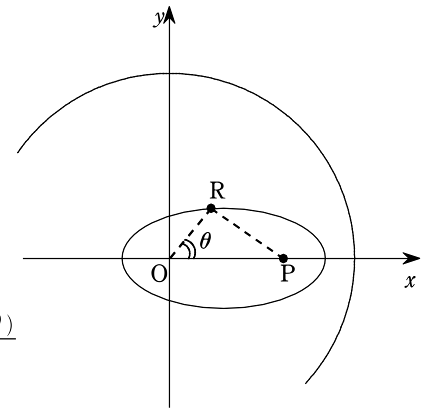
$\mathrm{OP}=t$，$\mathrm{OR}=r$，

いま，図形の対称性から $0<\theta<\pi$ で考える．

$\angle\mathrm{POR}=\theta$ として，余弦定理を用いると，

$$(2-r)^2=r^2+t^2-2rt\cos\theta$$

$$\iff r=\frac{4-t^2}{4-2t\cos\theta}=f(t)$$



定数 θ に対して，$0<t<2$ における

r のとりうる範囲を求めればよい．

$$\frac{dr}{dt}=\frac{-2t(4-2t\cos\theta)-(4-t^2)(-2\cos\theta)}{(4-2t\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{2t^2\cos\theta-8t+8\cos\theta}{(4-2t\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{2\cos\theta\left(t-\frac{2-2\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(t-\frac{2+2\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{(4-2t\cos\theta)^2}$$

（i）　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$0<\dfrac{2-2\sin\theta}{\cos\theta}<2<\dfrac{2+2\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，$t=\dfrac{2-2\sin\theta}{\cos\theta}$ のときに極大値をもつ．

$$f\left(\frac{2-2\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{2}{1+\sin\theta}$$

また，$\lim\limits_{t\to 0}r=1$，$\lim\limits_{t\to 2-0}r=0$ となるので，$0<r\leqq\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

（ii）　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$r=\dfrac{4-t^2}{4}$ となるので，$0<t<2$ のとき，$0<r<1$ である．

（iii）　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$\dfrac{2-2\sin\theta}{\cos\theta}$，$\dfrac{2+2\sin\theta}{\cos\theta}$ はともに負なので，r は単調に減少する．

よって，$0<t<2$ のとき，$0<r<1$

$\theta=0$ のとき，$r=\dfrac{2+t}{2}$ より，$1<r<2$．

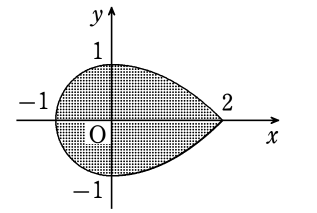
$\theta=\pi$ のとき，$r=\dfrac{2-t}{2}$ なので，$0<r<1$ となる．

よって，求める領域は図のようになる．

また，極方程式 $r=\dfrac{2}{1+\sin\theta}$ で表される曲線は，

xy 直交座標で表すと $y=-\dfrac{1}{4}x^2+1$ となるので，

求める面積 S は次のようになる．



$$\frac{S}{2}=\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\cdot 1^2d\theta$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{\pi}{4}$$

よって，$S=\dfrac{8}{3}+\dfrac{\pi}{2}$　…答

[Ⅳ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

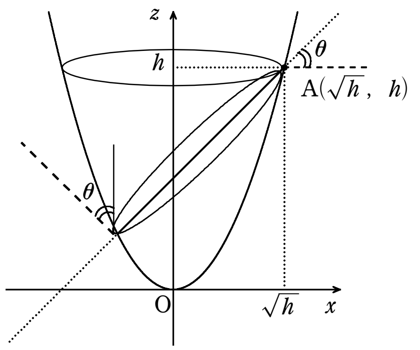
xyz 空間の zx 平面にある曲線 $z=x^2$ の，$0\leqq z\leqq h$ に対する部分を C とする．ただし $h>0$ である．回転軸 l を z 軸にとり，C を l のまわりに1回転させて得られる曲面からなる容器を S とする．S に水を満たした後，S の回転軸 l を z 軸に対して角 θ だけ傾ける．以下 $a=\tan\theta$ とおく．

(1) 水がすべてこぼれず，容器の中に残るための条件は $0\leqq a<$ (あ) である．このとき空気に触れている水面の面積を $T(a)$ とすると $T(a)=$ (い) である．

$\displaystyle\lim_{a\to+0}T'(a)=$ (う) であり，a の関数 $T(a)$ が $0<a<$ (あ) の範囲に極大値を持つための条件は $h>$ (え) である．

(2) $a=\sqrt{h}$ のとき容器に残った水の体積 V を求めると，$V=$ (お) である．ただしその計算にあたって必要ならば次の定積分の値を用いてよい．

$$\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{3\pi}{16},\ \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{3\pi}{128},\ \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{\pi}{16}$$



(1) $z=x^2$ なので，$z=h$，$x>0$ とすると，$x=\sqrt{h}$ である．この点 $(\sqrt{h},\ h)$ における接線の傾きは，

$$\frac{dz}{dx}=2x$$

なので，$2\sqrt{h}$．水がすべてこぼれない条件は，

$$0\leqq\tan\theta<2\sqrt{h}$$

つまり，$0\leqq a<2\sqrt{h}$ である．…答

このとき，空気に触れている水面の図形を考える．この回転体が満たす $(x,\ y,\ z)$ の関係式は，

$$x^2+y^2=z\quad\cdots①$$

である．また，上の xz 平面上で点 $\mathrm{A}(\sqrt{h},\ h)$ を通り傾き $a=\tan\theta$ となる直線の方程式は，

$$z=a(x-\sqrt{h})+h \iff z=ax-a\sqrt{h}+h\quad\cdots②$$

② は xyz 座標空間内では平面の方程式を表し，

①∩②

$$\iff\begin{cases}x^2+y^2=ax-a\sqrt{h}+h\\ z=ax-a\sqrt{h}+h\end{cases}$$

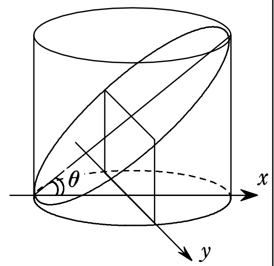
$$\iff\begin{cases}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}-a\sqrt{h}+h\\ z=ax-a\sqrt{h}+h\end{cases}$$

この2つの図形が表す共通部分は，円柱と平面との断面なので楕円となる．

長軸の長さを $2m$，短軸の長さを $2n$ とすると，

$$n=\sqrt{\frac{a^2}{4}-a\sqrt{h}+h}$$

$$m=\sqrt{\frac{a^2}{4}-a\sqrt{h}+h}\times\frac{1}{\cos\theta}$$



よって，面積 $T(a)$ は

$$\begin{aligned}T(a)&=\pi mn\\&=\pi\left(\frac{a^2}{4}-a\sqrt{h}+h\right)\cdot\sqrt{1+a^2}\\&=\frac{\pi}{4}(a-2\sqrt{h})^2\sqrt{1+a^2}\quad\cdots答\end{aligned}$$

このとき，

$$T'(a)=\frac{\pi}{4\sqrt{1+a^2}}(a-2\sqrt{h})(3a^2-2\sqrt{h}\,a+2)$$

となるので，

$$\lim_{a\to+0}T'(a)=-\pi\sqrt{h}$$

ここで，$f(a)=3a^2-2\sqrt{h}\,a+2$ とおく．

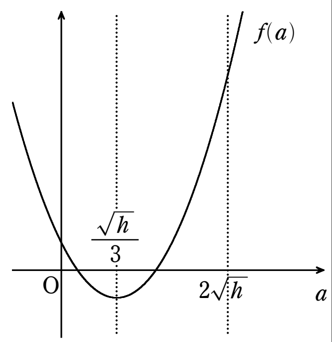
$f(a)$ が区間 $0<a<2\sqrt{h}$ において，符号が負から正に変化すれば極大値を持つ．

$f(0)=2>0$ なので，

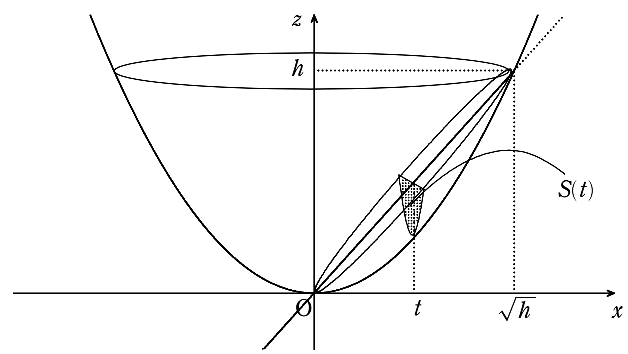
$$f\left(\frac{\sqrt{h}}{3}\right)<0$$

となればよい．これを解くと，

$h>6$ …答



(2)



① 式において，$x=t$ を代入すると $z=y^2+t^2$ となるので，上の図のように断面は放物線となる．また，② 式に $x=t$ を代入すると $z=at-a\sqrt{h}+h$．

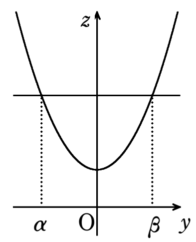
いま $a=\sqrt{h}$ のときなので，$z=\sqrt{h}\,t$

2 式を連立すると，

$$y^2+t^2=\sqrt{h}\,t$$

$$\iff y=\pm\sqrt{-t^2+\sqrt{h}\,t}$$

ここで，$\alpha=-\sqrt{-t^2+\sqrt{h}\,t}$，$\beta=\sqrt{-t^2+\sqrt{h}\,t}$ とおくと断面は右図となる．よって，断面積 $S(t)$ は



$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{8}{3}(-t^2+\sqrt{h}\,t)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

このとき，求める体積 V は

$$V=\int_0^{\sqrt{h}}\frac{4}{3}(-t^2+\sqrt{h}\,t)^{\frac{3}{2}}dt$$

ここで，$t=\sqrt{h}\,s$ と置き換えると，

$$\begin{aligned}V&=\frac{4}{3}\int_0^1(-hs^2+\sqrt{h}\cdot\sqrt{h}\,s)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{h}\,ds\\&=\frac{4}{3}h^2\int_0^1 s^{\frac{3}{2}}(1-s)^{\frac{3}{2}}ds\\&=\frac{4}{3}h^2\cdot\frac{3\pi}{128}\\&=\frac{\pi h^2}{32}\quad\cdots答\end{aligned}$$