

[I]

問1 ③ 問2 ① 問3 ③ 問4 ②

[II]

問1 $r = \frac{25}{2}$ $(a, b) = (4, \frac{9}{2})$

問2 $r = 5$ $(a, b) = (3, -1)$

[III]

$\frac{2}{7}$ 倍

[IV]

問1 $a = e^{-5}$ 問2 $c < b < d < a$ 問3 e^{-5}

[V]

問1 $a_1 = 0, 1$ のときは自明に成り立つ。

$a_1 \neq 0, 1$ のとき

$$F(t) = a_1 f(t) + a_2 f(x_2) - f(a_1 t + a_2 x_2)$$

$$F'(t) = a_1 f'(t) - a_1 f'(a_1 t + a_2 x_2)$$

$$= a_1 \{f'(t) - f'(a_1 t + a_2 x_2)\}$$

より

$$F'(x_2) = a_1 \{f'(x_2) - f'((a_1 + a_2)x_2)\} = 0 \quad (\because a_1 + a_2 = 1)$$

であり、任意の実数 t に対して

$$f''(t) > 0$$

により $f'(t)$ は単調増加関数であるので、 $a_1 > 0$ に注意して

$F(t)$ は $t = x_2$ において極小かつ最小となる。

$$F(x_2) = a_1 f(x_2) + a_2 f(x_2) - f(a_1 x_2 + a_2 x_2) = 0$$

したがって、題意の不等式は成り立つ。☒

問2

(i) $n = 2$ のときは問1により成り立つ。

(ii) $n = l (l \geq 2)$ のとき成り立つと仮定すると、 $f(\sum_{j=1}^l a_j x_j) \leq \sum_{j=1}^l a_j f(x_j)$ である。

ここで、 $n = l + 1$ のときを考えよう。 $\sum_{j=1}^{l+1} a_j = 1$ を満たす数列 $\{a_j\}$ があり、

$a_1 + a_2 + \dots + a_l = 0, a_{l+1} = 1$ のときは、明らかに成り立つので、

$a_1 + a_2 + \dots + a_l \neq 0$ のときを考え、 $a_1 + a_2 + \dots + a_l = s (> 0)$ とおき、数列 $\{b_j\}$ を

$$b_j = \frac{a_j}{a_1 + a_2 + \dots + a_l} \quad (j = 1, 2, \dots, l) \text{ と定める。}$$

$$f\left(\sum_{j=1}^{l+1} a_j x_j\right) = f\left(s \sum_{j=1}^l b_j x_j + a_{l+1} x_{l+1}\right)$$

$$\leq s f\left(\sum_{j=1}^l b_j x_j\right) + a_{l+1} f(x_{l+1}) \quad (\because s > 0, a_{l+1} \geq 0, s + a_{l+1} = 1)$$

$$\leq s \left(\sum_{j=1}^l b_j f(x_j)\right) + a_{l+1} f(x_{l+1})$$

$$= s \left(\sum_{j=1}^l \frac{a_j}{s} f(x_j)\right) + a_{l+1} f(x_{l+1})$$

$$= \sum_{j=1}^l a_j f(x_j) + a_{l+1} f(x_{l+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{l+1} a_j f(x_j)$$

よって、 $n = l + 1$ のときも成り立つ。

(i)(ii) より数学的帰納法により、2以上の自然数 n について

$$f\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n a_j f(x_j)$$

が成り立つことが示された。☒

問3

問2の不等式に代入すると、

$$f\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n a_j f(x_j)$$

$$e^{\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{p_j}} \leq \sum_{j=1}^n \frac{e^{x_j}}{p_j} \quad \dots \text{☒}$$

問4

$x_j = p_j \log A_j$ を問3の不等式に代入すると、

$$e^{\sum_{j=1}^n \log A_j} \leq \sum_{j=1}^n \frac{e^{p_j \log A_j}}{p_j}$$

$$e^{\log A_1 + \log A_2 + \dots + \log A_n} \leq \sum_{j=1}^n \frac{(e^{\log A_j})^{p_j}}{p_j}$$

$$\prod_{j=1}^n e^{\log A_j} \leq \sum_{j=1}^n \frac{A_j^{p_j}}{p_j}$$

$$\prod_{j=1}^n A_j \leq \sum_{j=1}^n \frac{A_j^{p_j}}{p_j}$$

となる。☒

問5

問4より、

$$\prod_{j=1}^n A_j \leq \sum_{j=1}^n \frac{A_j^{p_j}}{p_j}$$

である。ここに、 $A_j = \frac{|g_j(x)|}{\left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}}$ を代入すると、

$$\prod_{j=1}^n \frac{|g_j(x)|}{\left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}} \leq \sum_{j=1}^n \frac{|g_j(x)|^{p_j}}{p_j \int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx}$$

ここで、 $\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx = K_j$ とおき、辺々に $\prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}} (> 0)$ をかけると

$$\prod_{j=1}^n |g_j(x)| \leq \sum_{j=1}^n \frac{|g_j(x)|^{p_j}}{p_j \cdot K_j} \cdot \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

ここで、区間 $[a, b]$ において、両辺ともに正なので、 x で定積分すると、

$$\int_a^b \prod_{j=1}^n |g_j(x)| dx \leq \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \frac{|g_j(x)|^{p_j}}{p_j \cdot K_j}\right) dx \cdot \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{p_j \cdot K_j} \int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx \right\} \cdot \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p_j \cdot K_j} \cdot K_j \right) \cdot \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} \cdot \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$= \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}} \quad \left(\because \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = 1\right)$$

よって示された。☒

【講評】

[I] 基本的な知識を深く理解しているかを問う問題である。問1では $a = 0$ の場合を考えることが必要、また問4は対偶をとると考えやすい。

[II] 問題の意味を読み取ることで、三角形の外心と内心を求めればよいことが分かる。

[III] 誘導はないが、基本的な知識だけで解ける問題である。

[IV] a, b, c の大小関係はすぐに分かる。 d については、 $d = \sqrt{ab}$ から a と b の間にあることが分かる。また、問4では $a^x < a^x + b^x + c^x + d^x < 4a^x$ から、両辺を $\frac{1}{x}$ 乗して

はさみうちの原理を用いると $a = e^{-5}$ に収束することが分かる。

[V] 完答は難しいので、問2か問3あたりまで解答できれば十分である。抽象的な問題なので、手が付けられなくても他の問題で挽回すればよい。

一次合格ラインは60%程度と考えられる。

YMSは二次試験対策に強い!

二次で勝つなら **YMS**

日本医科大学(前) 集団討論テーマ大的中!!

二次試験対策講座

日本医大(後)

3/7(火) 16:00~19:15

3/1(水)
昭和II模試
模試翌日3/2(木)に
解説授業を行います

YMS入学試験
認定合格
特待生制度

詳細はホームページをご覧ください。お電話にて
お問い合わせください。TEL
医学部専門予備校 **03-3370-0410**
www.yms.ne.jp
東京都渋谷区代々木1-37-14