YMS 2017年度 解答速報　大阪医科大学 前期　数学

1

(1) $t_1 \neq t_2$ に対して，$f(t_1)=f(t_2)$，$g(t_1)=g(t_2)$ となればよい．

$$\begin{cases} t_1{}^3-t_1=t_2{}^3-t_2 & \cdots ① \\ e^{-t_1{}^2}=e^{-t_2{}^2} & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$t_1{}^2=t_2{}^2$ となるが，$t_1 \neq t_2$ なので，$t_2=-t_1$．これを ① に代入すると，

$$t_1{}^3-t_1=(-t_1)^3-(-t_1) \iff 2t_1(t_1{}^2-1)=0$$

$t_1=0$ のとき，$t_1=t_2$ となり条件を満たさないので，$t_1{}^2=1 \iff t_1=\pm 1$

よって，異なる 2 つの値は，$t=\pm 1$

$t=1$ のとき，$f(1)=0$，$g(1)=\dfrac{1}{e}$ より，$\left(1,\ \dfrac{1}{e}\right)$ （$t=-1$ のときも一致する） …答

また，$f'(t)=3t^2-1$，$g'(t)=-2te^{-t^2}$ となるので，

$t=1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(1)}{f'(1)}=-\dfrac{1}{e}$ …答

$t=-1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(-1)}{f'(-1)}=\dfrac{1}{e}$ …答

(2) x 軸平行となるとき，$f'(t) \neq 0$ かつ $g'(t)=0$ となればよい．

$$g'(t)=-2te^{-t^2}=0 \iff t=0 \quad \cdots 答$$

このとき，$f'(0) \neq 0$ であり，$f(0)=0$，$g(0)=1$ から $(x,\ y)=(0,\ 1)$ …答

y 軸平行となるとき，$f'(t)=0$ かつ $g'(t) \neq 0$ となればよい．

$$f'(t)=3t^2-1=0 \iff t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots 答$$

このとき，$f'(0) \neq 0$ である．

$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\mp\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$g\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ から

$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$(x,\ y)=\left(-\dfrac{2}{3\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$ …答

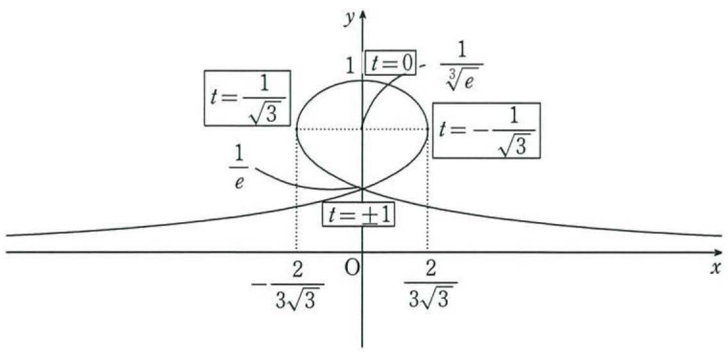
$t=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$(x,\ y)=\left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$ …答

(3) $f'(t)=3t^2-1$，$g'(t)=-2te^{-t^2}$ より，傾き $\dfrac{dy}{dx}$ の正負は下のようになる．

t	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$	+	0	−	−	−	0	+
$g'(t)$	+	+	+	0	−	−	−
$\frac{dy}{dx}$	+	0	−	0	+	0	−

…答

(4) (1)～(3) より，グラフを描くと下のようになる．



2

3 点 A，B，C を xy 平面上の点と考えても一般性を失わない．

(1) 半径 1 の円に内接する三角形の 1 辺の長さなので，$\mathrm{DF}=\sqrt{3}$．

また，**図 2** の通り，$\triangle\mathrm{BFD} \sim \triangle\mathrm{BPQ}$ なので，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{FD}\times t=\sqrt{3}\,t \quad \cdots 答$$

図 1

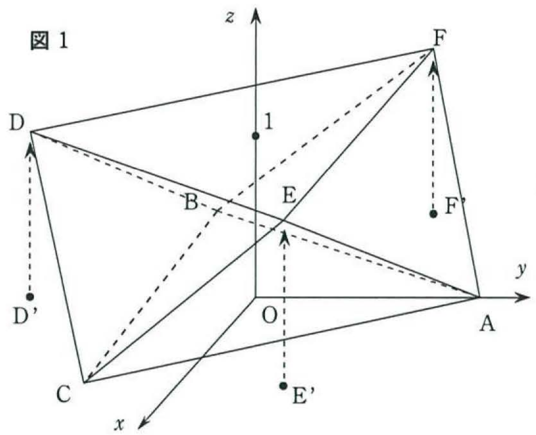
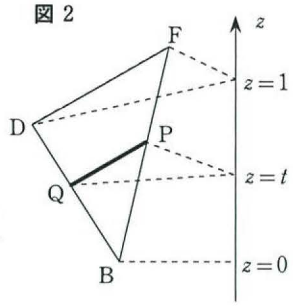


図 2



(2) (1) と同様にして，$z=t$ の切り口を考えていく．

いま，図形を xy 平面に射影して考えると**図 3** となる．

ここで，$\mathrm{PQ}=\mathrm{RS}=\mathrm{TU}=\sqrt{3}\,t$，$\mathrm{QR}=\mathrm{ST}=\mathrm{UP}=\sqrt{3}(1-t)$ となるので，求める面積は

$S(t)=$(正六角形 AFBDCE)$-\triangle\mathrm{BPQ}\times 3-\triangle\mathrm{DQR}\times 3$ である．

$$(\text{正六角形 AFBDCE})=\triangle\mathrm{OAF}\times 6=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle\mathrm{BPQ}=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2,\quad \triangle\mathrm{DQR}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(1-t)^2$$

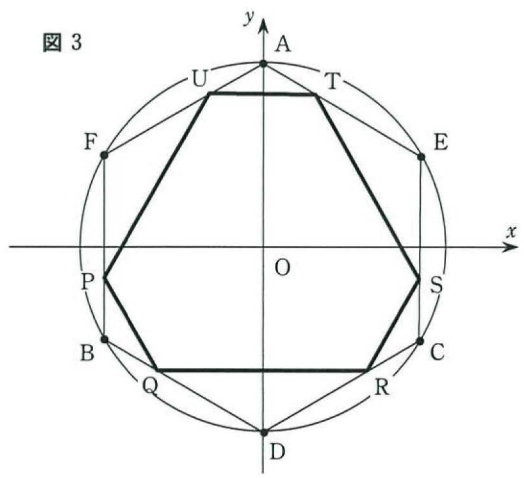
なので，

$$S(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}t^2\times 3-\frac{\sqrt{3}}{4}(1-t)^2\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{4}(1+2t-2t^2) \quad \cdots 答$$

(3) 求める体積は，(2) を区間 $0\leqq t\leqq 1$ で積分したもの．

$$V=\int_0^1 S(t)dt=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 2\int_0^1 t(1-t)dt+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^3+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3} \quad \cdots 答$$

図 3



3

(1) 内心は角の二等分線の交点であることを用いる。

図のように C を通り AM に平行な直線と BA の延長が交わる点を D とおく。

このとき錯角，同位角の関係により

$$\angle\mathrm{BAM}=\angle\mathrm{CAM}=\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{ADC}$$

となるので，$\triangle\mathrm{ACD}$ は $\mathrm{AC}=\mathrm{AD}$ の二等辺三角形である。

したがって

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AD}$$

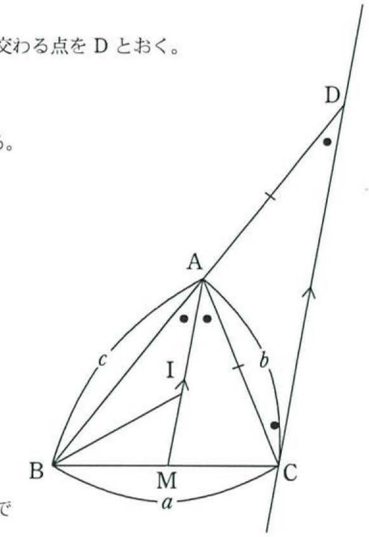
であり，かつ平行線の性質より

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=\mathrm{BM}:\mathrm{MC}$$

したがって

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BM}:\mathrm{MC}$$

が言える。終



(2) (1) の性質を利用する。

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}$$

であり，また $\mathrm{AI}:\mathrm{IM}=c:\dfrac{ac}{b+c}=b+c:a$ となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$$

となる。この始点を I に取り直すと

$$-\overrightarrow{\mathrm{IA}}=\frac{b(\overrightarrow{\mathrm{IB}}-\overrightarrow{\mathrm{IA}})+c(\overrightarrow{\mathrm{IC}}-\overrightarrow{\mathrm{IA}})}{a+b+c}$$

$$-(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{IA}}=b\overrightarrow{\mathrm{IB}}-b\overrightarrow{\mathrm{IA}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}-c\overrightarrow{\mathrm{IA}}$$

$$-a\overrightarrow{\mathrm{IA}}=b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}$$

したがって

$$a\overrightarrow{\mathrm{IA}}+b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\vec{0}$$

が言える。終

(3)
$$\begin{aligned}
&a|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2\\
&=a|\overrightarrow{\mathrm{IA}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{IB}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{IC}}-\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2\\
&=a(|\overrightarrow{\mathrm{IA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IP}}+|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2)+b(|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{IB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IP}}+|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2)\\
&\qquad +c(|\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IP}}+|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2)\\
&=a|\overrightarrow{\mathrm{IA}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2+(a+b+c)|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2-2(a\overrightarrow{\mathrm{IA}}+b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{IP}}\\
&=a|\overrightarrow{\mathrm{IA}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2+(a+b+c)|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2 \quad (\because (2))\\
&\geqq a|\overrightarrow{\mathrm{IA}}|^2+b|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|^2+c|\overrightarrow{\mathrm{IC}}|^2
\end{aligned}$$

等号は $|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|=0$ つまり $\mathrm{P}=\mathrm{I}$ のとき成り立つ。

したがって $\mathrm{P}=\mathrm{I}$ のとき与式は最小となる。終

4

(1)

$a \geqq 1$ において，

$$P(a)=\frac{{}_{a}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{20-a}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}+\frac{{}_{20-a}\mathrm{C}_4}{{}_{20}\mathrm{C}_4}$$

$$=\frac{1}{{}_{20}\mathrm{C}_4}\left\{\frac{a(20-a)(19-a)(18-a)}{6}+\frac{(20-a)(19-a)(18-a)(17-a)}{24}\right\}$$

$$=\frac{1}{24\cdot 15\cdot 19\cdot 17}\{4a(20-a)(19-a)(18-a)+(20-a)(19-a)(18-a)(17-a)\}$$

$$=\frac{1}{116280}(20-a)(19-a)(18-a)(17+3a)$$

また，$P(0)=1$ となるので，この式は $a=0$ のときも成り立つ。

$P(a)$ が多項式であることも示された。

(2)

簡単のため，$\dfrac{1}{116280}=A$ とおく

$$P(a+1)-P(a)$$
$$=A(19-a)(18-a)(17-a)(3a+20)-A(20-a)(19-a)(18-a)(17+3a)$$
$$=A(19-a)(18-a)\{(17-a)(3a+20)-(20-a)(17+3a)\}$$
$$=A(-12a)$$

より，$P(a)$ と $P(a+1)$ の大小関係は

$a=0$ のとき，$P(0)=P(1)$

$1 \leqq a \leqq 19$ のとき，$P(a+1)<P(a)$

(3)

$P(a)=\dfrac{1}{24\cdot 15\cdot 19\cdot 17}(20-a)(19-a)(18-a)(17+3a)$ から

$$P(2)=\frac{1}{24\cdot 15\cdot 19\cdot 17}\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 23=\frac{92}{95}\fallingdotseq 0.968$$

$$P(3)=\frac{1}{24\cdot 15\cdot 19\cdot 17}\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 26=\frac{52}{57}\fallingdotseq 0.912$$

さらに，(2)より，$P(0)=P(1)>P(2)>P(3)>P(4)>\cdots>P(20)$ であるから，

$P(a)>0.95$ となる a は $a=0,\ 1,\ 2$

5

(1) △OAB は OA＝OB（＝1）の二等辺三角形であり，AB の中点 M に対し，

$$\mathrm{OM}\perp\mathrm{AB},\quad \mathrm{OM}=\sqrt{1-\mathrm{AM}^2}\quad \cdots①$$

また，同様に考えると，

$$\mathrm{OM_1}\perp\mathrm{A_1B_1},\quad \mathrm{OM_1}=\sqrt{1-\mathrm{AM_1}^2}\quad \cdots②$$

△OMR と $\triangle \mathrm{OM_1R}$ において，

$$\angle\mathrm{OMR}=\angle\mathrm{OM_1R}=\frac{\pi}{2},\quad 辺\ \mathrm{OR}\ は共通,\quad \mathrm{OM}=\mathrm{OM_1}\ (\because ①=②)$$

よって，直角三角形の合同条件を満たすから，

$$\triangle\mathrm{OMR}\equiv\triangle\mathrm{OM_1R}$$

が成り立つ．…終

(2) $\angle\mathrm{MOM_1}=2\theta$ であり，(1) より $\angle\mathrm{MOR}=\angle\mathrm{M_1OR}$ であるから，

$$\angle\mathrm{MOR}=\theta$$

が成り立つ．…終

(3) 点 R を表す複素数は，点 M を表す複素数 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を $\angle\mathrm{MOR}=\theta$ だけ回転したもの

を，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{\cos\theta}$ 倍することによって得られる．よって，

$$\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot\frac{1}{\cos\theta}=(\alpha+\beta)\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{2\cos\theta}=(\alpha+\beta)\lambda\quad\cdots答$$

同様に考えて，点 P，Q を表す複素数は，

$$(\beta+\gamma)\lambda,\quad (\gamma+\alpha)\lambda\quad\cdots答$$

(4) △ABC と △PQR において，

$$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|,\quad \mathrm{BC}=|\gamma-\beta|,\quad \mathrm{CA}=|\alpha-\gamma|$$
$$\mathrm{PQ}=|(\gamma+\alpha)\lambda-(\beta+\gamma)\lambda|=|\beta-\alpha||\lambda|,$$
$$\mathrm{QR}=|(\alpha+\beta)\lambda-(\gamma+\alpha)\lambda|=|\gamma-\beta||\lambda|,$$
$$\mathrm{RP}=|(\beta+\gamma)\lambda-(\alpha+\beta)\lambda|=|\alpha-\gamma||\lambda|$$

よって，△ABC ∽△PQR であり，次の等式を満たす δ を求めればよい．

$$\frac{(\beta+\gamma)\lambda-\delta}{\alpha-\delta}=\frac{(\gamma+\alpha)\lambda-\delta}{\beta-\delta}=\frac{(\alpha+\beta)\lambda-\delta}{\gamma-\delta}$$

$\dfrac{(\beta+\gamma)\lambda-\delta}{\alpha-\delta}=\dfrac{(\gamma+\alpha)\lambda-\delta}{\beta-\delta}$ より，

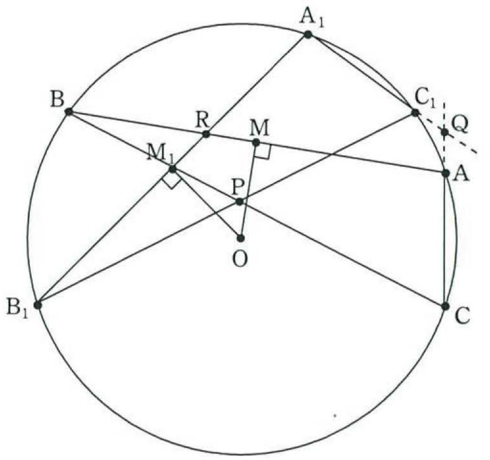
$$(\beta-\delta)(\beta\lambda+\gamma\lambda-\delta)=(\alpha-\delta)(\gamma\lambda+\alpha\lambda-\delta)$$
$$\iff \beta(\beta+\gamma)\lambda-(\beta\lambda+\gamma\lambda+\beta)\delta=\alpha(\gamma+\alpha)\lambda-(\gamma\lambda+\alpha\lambda+\alpha)\delta$$
$$\iff (\beta^2+\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha^2)\lambda=(\beta\lambda+\gamma\lambda+\beta-\gamma\lambda-\alpha\lambda-\alpha)\delta$$
$$\iff (\beta-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)\lambda=(\beta-\alpha)(1+\lambda)\delta$$

$\alpha\neq\beta$，$\lambda\neq-1$ より，

$$\delta=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)\lambda}{1+\lambda}$$

同様に，$\dfrac{(\gamma+\alpha)\lambda-\delta}{\beta-\delta}=\dfrac{(\alpha+\beta)\lambda-\delta}{\gamma-\delta}$ からも $\delta=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)\lambda}{1+\lambda}$ が得られる．

よって，題意は成立し，そのときの δ は，$\delta=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)\lambda}{1+\lambda}$ である．…答



【講評】

1　微積分の基本問題であり (4) の計算が多少面倒だが解き切りたい。

2　八面体の体積を求める問題。誘導が丁寧であるが，(2) の切り口が想像しにくいだろう。このような問題の経験がないと辛い。

3　内心のベクトル表示に関する問題である。(1) で困った人が多いのではないだろうか。(2)(3)は経験があれば易しいので取りたい。

4　(1) (2) は平易な確率の問題である。類題の経験もあるだろう。また，全体的に計算量があるので時間がかかったであろう。試験ではある程度「あたり」をつけることも大事。

5　(1)(2)は基本的な図形問題なので落とせない。(3)は中点を回転することに気付けばよい。λ が式の中に現れるので置き換えればよい。(4)は難しいので差がつかないだろう。

全体を通して難しく容赦のないセットである。受験生が苦手とする図形問題と証明問題が多く、証明を書いたもののどのくらいの点数になるのかわかり辛い。なるべく5問すべてに手をつけ、部分点をかき集め5割overで勝負になるのでは。