## [ I ]

初項 2，公差 3 の等差数列を $\{a_n\}$ とおく．また $2 \leqq k$ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_k{}^2=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(\boxed{\text{ウ}}k^2+\boxed{\text{エ}}k-\boxed{\text{オ}})$ である．

(2) この等差数列を用いて関数 $f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)$ を考える．このとき関数 $f(x)$ の $x^{k-2}$ の係数は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}(\boxed{\text{ク}}k^3-\boxed{\text{ケ}}k^2-\boxed{\text{コ}}k+\boxed{\text{サ}})$ である．

(3) 関数 $f(x+1)-f(x)$ の $x^{k-2}$ の係数は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}(\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}})(\boxed{\text{ソタ}}+\boxed{\text{チ}})}{\boxed{\text{ツ}}}$ である．

解説

(1) $a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$ より，

$$(\text{与式})=\sum_{n=1}^{k}(3n-1)^2=\sum_{n=1}^{k}(9n^2-6n+1)$$
$$=9\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-6\cdot\frac{1}{2}k(k+1)+k$$
$$=\frac{k}{2}(6k^2+3k-1) \quad \cdots \text{答}$$

(2) $k \geqq 2$ のとき，$f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)$ の $x^{k-2}$ の係数は，各因数から $x$ を $k-2$ 個，定数を 2 個選び，その総和を求めることで得られる．この和を $A_k$ とおくと，次の等式が成り立つ．

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_k{}^2+2A_k$$

したがって，

$$\left\{\frac{1}{2}k(3k+1)\right\}^2=\frac{k}{2}(6k^2+3k-1)+2A_k$$
$$\Longleftrightarrow \quad A_k=\frac{k}{8}(9k^3-6k^2-5k+2) \quad \cdots \text{答}$$

(3) $f(x)=x^k+(a_1+a_2+\cdots+a_k)x^{k-1}+A_kx^{k-2}+g(x)$
$$=x^k+\frac{1}{2}k(3k+1)x^{k-1}+A_kx^{k-2}+g(x)$$

と表すことができる．ただし，$g(x)$ は，

・$k \geqq 3$ のとき，$k-3$ 次以下の整式
・$k=2$ のとき，0

である．このとき，

$$f(x+1)=(x+1)^k+\frac{1}{2}k(3k+1)(x+1)^{k-1}+A_k(x+1)^{k-2}+g(x+1)$$

であるから，その $x^{k-2}$ の係数は，二項定理を用いて，

$${}_kC_2+\frac{1}{2}k(3k+1){}_{k-1}C_1+A_k$$

したがって，$f(x+1)-f(x)$ の $x^{k-2}$ の係数は，

$${}_kC_2+\frac{1}{2}k(3k+1){}_{k-1}C_1=\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}k(3k+1)(k-1)$$
$$=\frac{k(k-1)(3k+2)}{2} \quad \cdots \text{答}$$

## [ II ]

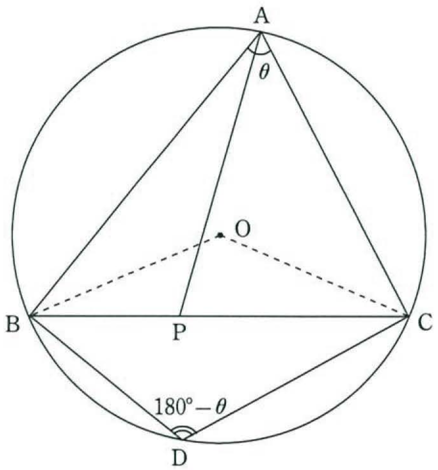
三角形 ABC において AB=6，BC=4，CA=5 とする．また，この三角形の外接円の中心を O とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおくとき $\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．また，三角形 OBC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

(2) 辺 BC を $k:1-k$ に内分する点を P とおく．ただし $0<k<1$ とする．このとき，$\mathrm{AP}^2=\boxed{\text{キク}}k^2-\boxed{\text{ケコ}}k+\boxed{\text{サシ}}$ である．

(3) 点 A がない方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上に点 D をとる．BD=2 となるとき $\mathrm{CD}=\dfrac{-\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である．また，点 D が点 B から点 C まで動くとき，三角形 BDC の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である．

解説




(1) △ABC に余弦定理を用いて，

$$\cos\theta=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{3}{4} \quad \cdots \text{答}，$$

また，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

△ABC の外接円の半径を $R$ として，正弦定理より，

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\theta}=\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{8}{\sqrt{7}}$$

△OBC の底辺を BC と考えたときの高さを $h$ として，

$$h=\sqrt{R^2-\left(\frac{\mathrm{BC}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{7}-4}=\frac{6}{\sqrt{7}}$$

したがって，

$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{12\sqrt{7}}{7} \quad \cdots \text{答}$$

別解

円周角の定理より，$\angle\mathrm{BOC}=2\theta$ であるから，

$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta=R^2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{64}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{12\sqrt{7}}{7} \quad \cdots \text{答}$$

(2) △ABC に余弦定理を用いて，

$$\cos B=\frac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 4}=\frac{9}{16}$$

△ABP に余弦定理を用いて，

$$\mathrm{AP}^2=6^2+(4k)^2-2\cdot 6\cdot 4k\cos B$$
$$=36+16k^2-2\cdot 6\cdot 4k\cdot\frac{9}{16}$$
$$=16k^2-27k+36 \quad \cdots \text{答}$$

(3) $\mathrm{CD}=x$ とおく．

$$\cos D=\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta=-\frac{3}{4}$$

であるから，△BCD に余弦定理を用いて，

$$4^2=2^2+x^2-2\cdot 2x\cos D$$
$$\Longleftrightarrow \quad 16=4+x^2-2\cdot 2x\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \quad x^2+3x-12=0$$

$x>0$ より，$\mathrm{CD}=x=\dfrac{-3+\sqrt{57}}{2}$ $\cdots$ 答

また，△BCD の面積が最大となるのは，点 D が弧 BC の中点になるときである．そのときの面積は，

$$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}(R-h)=\frac{1}{2}\cdot 4\left(\frac{8}{\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}}\right)=\frac{4\sqrt{7}}{7} \quad \cdots \text{答}$$

## [Ⅲ]

$0\leqq t\leqq 1$ の範囲で線分 $l_t : y=t^2x-t^3\ (0\leqq x\leqq 3)$ が動く．このとき次の問に答えなさい．

(1) 線分 $l_1$ と線分 $l_{\frac{1}{2}}$ の交点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\right)$ である．

(2) 線分 $l_t$ 上の点 $(x,\ y)$ が動く領域 $D$ は

$0\leqq x\leqq \boxed{オ}$ のとき　$x-\boxed{カ}\leqq y\leqq \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}x^{\boxed{コ}}$

$\boxed{オ}\leqq x\leqq \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ のとき　$\boxed{ス}\leqq y\leqq \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}x^{\boxed{チ}}$

$\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\leqq x\leqq 3$ のとき　$\boxed{ツ}\leqq y\leqq x-\boxed{テ}$

である．

(3) 領域 $D$ の面積は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌ}}$ である．

### 解説

(1) $y=t^2x-t^3$ …① に $t=1,\ \dfrac{1}{2}$ を代入すると，

$$l_1 : y=x-1,\ l_{\frac{1}{2}} : y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$$

となるので，$l_1$，$l_{\frac{1}{2}}$ を連立し，交点は $\left(\dfrac{7}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$ …答

(2) $l_t$ 上の点 $(x,\ y)$ について，①が成り立つ．これを $t$ についての方程式と見ると，

$$t^3-xt^2+y=0$$

右辺を $f(t)$ とおくとき，$f'(t)=3t^2-2xt=3t\left(t-\dfrac{2x}{3}\right)$ である．

(ⅰ) $0\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}$ のとき

| $t$ | 0 | … | $\frac{2}{3}x$ | … | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | 0 | − | 0 | + | |
| $f(t)$ | | ↘ | | ↗ | |

いま，$f(t)=0$ が $0\leqq t\leqq 1$ に少なくとも1つ解を持つためには，$y=f(t)$ が $t$ 軸と $0\leqq t\leqq 1$ に少なくとも1点，共有点を持てばいいので，

$$f\left(\frac{2}{3}x\right)\leqq 0 \quad かつ \quad \{f(0)\geqq 0 \text{ または } f(1)\geqq 0\}$$

$$\Longleftrightarrow\ y\geqq \frac{4}{27}x^3 \quad かつ \quad \{y\geqq 0 \text{ または } y\geqq x-1\}$$

(ⅱ) $\dfrac{3}{2}\leqq x$ のとき

| $t$ | 0 | … | 1 |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | 0 | − | |
| $f(t)$ | | ↘ | |

(ⅰ)と同様に考えて，

$$f(0)\geqq 0 \quad かつ \quad f(1)\leqq 0$$

$$\Longleftrightarrow\ y\geqq 0 \quad かつ \quad y\leqq x-1$$

(ⅰ)，(ⅱ)より線分 $l_t$ 上の点 $(x,\ y)$ が動く領域 $D$ は

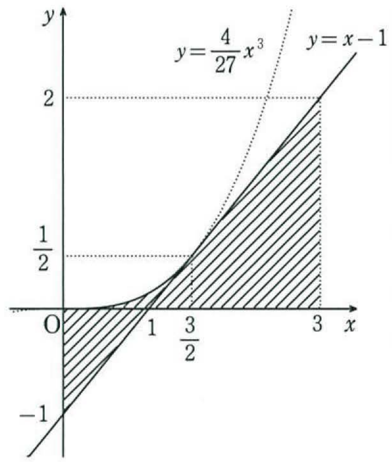
$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$x-1\leqq y\leqq \dfrac{4}{27}x^3$

$1\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}$ のとき　$0\leqq y\leqq \dfrac{4}{27}x^3$　　…答

$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$ のとき　$0\leqq y\leqq x-1$

(3) (2)で求めた図形は右図となる．

囲まれた図形の面積は，




$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(3-\frac{3}{2}\right)$$

$$+\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{4}{27}x^3dx$$

$$=\frac{41}{16}\quad …答$$

### 講評

計算量がやや多めで昨年より難化した。大問Ⅰは(2)以降の計算が面倒で，また経験がないと難しかっただろう。大問Ⅱはセンターレベルでほとんど差がつかない。ここは完答必須である。大問Ⅲは直線の通過領域に関する問題である。さまざまな解き方が考えられ，経験値の差が出る問題ではあるが，穴埋め特有の勘で答えが出た人もいるだろう。作戦としてはまず大問2，3を解ききって，残りの時間で大問1に時間を割きたい。全体としては7割が一次合格ラインであろう。

#### YMS代表 市川より講評

Ⅲは包絡線の定理を用いると容易に答がでます（教科書応用数学，天国への数学，306）

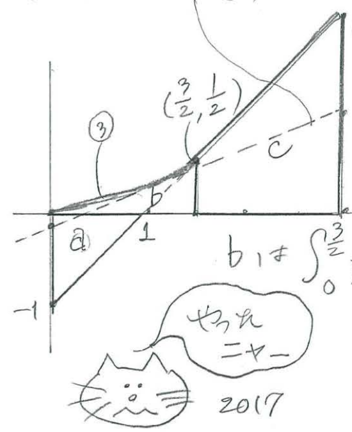
$lt : y=t^2x-t^3$ …①　①を$t$で微分して

$0=2xt-3t^2$ …②

①，②から$t$を消すと　$y=\frac{4}{27}x^3$ ③ を得る．

$t=0,\ t=\frac{1}{2},\ t=1$ のときの $lt$ は，それぞれ

$y=0,\ y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8},\ y=x-1$ で 図を書くと．




3つの部分になる。

a…$\frac{1}{2}$

cの台形は．

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{8}$

bは $\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{4}{27}x^3dx=\frac{3}{16}$

$a+b+c \to \frac{41}{16}$