1

次の各問いに答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　A さん，B さんは仲の良い友達である。イベントに二人を誘うとき，A さんが来る確率は 0.5，B さんが来る確率は 0.6 であるという。また，A さんが来るという条件の下で B さんが来る確率は 0.9 であるという。

(1－1)　A さん，B さんが 2 人とも来る確率を求めよ。

(1－2)　A さん，B さんの少なくとも 1 人が来る確率を求めよ。

(1－3)　B さんが来るという条件の下で A さんが来る確率を求めよ。

(2)　空間内に 2 定点 A，B があり，原点 O とで三角形をなすとする。空間にある点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$$

を満たしているとき，動点 P の存在範囲を求め，どのような図形になるか答えよ。

(1)

(1－1)　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{0.5}=0.9$ より

$$P(A\cap B)=0.9\cdot 0.5=0.45\quad\cdots\text{答}$$

(1－2)　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.6-0.45=0.65\quad\cdots$答

(1－3)　$P_B(A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(B)}=\dfrac{0.45}{0.6}=0.75\quad\cdots$答

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと

$$\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{b})\cdot\vec{p}=0$$

$$3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$|\vec{p}|^2-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\left|\vec{p}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+\vec{b}|^2-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}{9}$$

$$\therefore\ \left|\vec{p}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}}{3}$$

よって

P は 三角形 OAB の重心を中心とした半径 $\dfrac{\sqrt{|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}}{3}$ の球面上に存在する。

…答

2

次の問いに答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　ド･モアブルの定理より，$(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$ が成り立つ。

この等式の虚数部分を比較することによって，$\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}$ を $\cos\theta$ の式で表せ。

ただし，答は実数係数の範囲で因数分解した形で答えよ。

(2)　(1) の結果を用いて，次の式の値を求めよ。

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

(3)　ド･モアブルの定理より，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ が成り立つ。

この等式の虚数部分を比較することによって，$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ を $\cos\theta$ の式で表せ。

ただし，答は実数係数の範囲で因数分解した形で答えよ。

(4)　(3) の結果を用いて次の式の値を n の式で簡潔に表せ。

$$\underbrace{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}_{n-1\text{ 個の積}}$$

(1)　二項定理を用いて

$(\cos\theta+i\sin\theta)^5$ の虚部

$$={}_5\mathrm{C}_1\cos^4\theta\sin\theta-{}_5\mathrm{C}_3\cos^2\theta\sin^3\theta+{}_5\mathrm{C}_5\sin^5\theta$$

$$=\sin\theta(5\cos^4\theta-10\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)$$

$$=\sin\theta(16\cos^4\theta-12\cos^2\theta+1)$$

となるので

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}=16\cos^4\theta-12\cos^2\theta+1$$

$$=(4\cos^2\theta-1)^2-4\cos^2\theta$$

$$=(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)$$

$$=16\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

…答

(2)　$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos\dfrac{3}{5}\pi=-\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos\dfrac{4}{5}\pi=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　（順に α，β，γ，δ とおく）

であることを既知として (1) は

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}=16(\cos\theta-\alpha)(\cos\theta-\beta)(\cos\theta-\gamma)(\cos\theta-\delta)$$

と書けることになる。

両辺の θ を 0 に近づけると

$$5=16(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)$$

より

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)=\frac{5}{16}\quad\cdots\text{答}$$

(3)　(1)と同様にして

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=2^{n-1}\left(\cos\theta-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\cos\theta-\cos\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

…答

(4)　θ を 0 に近づけると

$$n=2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

より

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}\quad\cdots\text{答}$$

3

次の各問いに答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　2 つの自然数 A，B について [A∗B] は，A，B のうち大きい方の数を小さい方の数で除した余りを表す。例えば [19∗8]＝3 となる。ただし，A＝B のときは [A∗B]＝0 とする。

(1－1)　$[N_1*41]=5$ となる 100 以下の自然数 N_1 は全部で何個あるか求めよ。

(1－2)　$[N_2*48]=[N_2*84]$ となる 2017 以下の自然数 N_2 は全部で何個あるか求めよ。

(2)　正十二面体の辺の数を求めよ。なお，正十二面体の頂点の数は 20 である。

(3)　2 次方程式 $x^2-(t-7)x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき

$$(1-t\alpha+\alpha^2)(1-t\beta+\beta^2)$$

の値を求めよ。

(1)

(1－1)　$[N_1*41]=5$　…① とする。

$N_1=41$ のとき ① は不成立。また，余りが 5 なので $N_1\geqq 6$ である。

次の 2 つの場合を考える。

（ⅰ）　$6\leqq N_1\leqq 40$ のとき，

$41=N_1A+5$ (A は整数) であるから，$N_1A=36$ となり，N_1 は 36 の約数である。

したがって，$N_1=6$，9，12，18，36

（ⅱ）　$42\leqq N_1\leqq 100$ のとき，

$N_1=41B+5$ (B は整数) であるから，$B=1$，2 として $N_1=46$，87

（ⅰ)，(ⅱ) より，① を満たす N_1 の個数は 7 個である。　…答

(1－2)　$[N_2*48]=[N_2*84]$　…② とする。

$N_2=48$，84 のとき ② は不成立。次の 3 つの場合を考える。

（ⅰ）　$1\leqq N_2\leqq 47$ のとき，

$48=N_2C+[N_2*48]$，$84=N_2D+[N_2*84]$ (C，D は整数) であるから，② より，

$$48-N_2C=84-N_2D\iff N_2(D-C)=36$$

したがって，N_2 は 36 の約数であり，

$$N_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36$$

（ⅱ）　$49\leqq N_2\leqq 83$ のとき，

N_2 を 48 で割った商と，84 を N_2 で割った商はともに 1 であるから，

$$N_2=48+[N_2*48],\qquad 84=N_2+[N_2*84]$$

② より，

$$N_2-48=84-N_2\iff N_2=66$$

（ⅲ）　$85\leqq N_2\leqq 2017$ のとき，

$N_2=48E+[N_2*48]$，$N_2=84F+[N_2*84]$ (E，F は整数) であるから，② より，

$$N_2-48E=N_2-84F\iff 4E=7F$$

4 と 7 は互いに素であるから，

$$E=7G,\qquad F=4G\quad(G\text{ は整数})$$

と表すことができ，

$$N_2=336G+[N_2*48]$$

$G=1$，2，3，4，5 に対しては，$0\leqq[N_2*48]\leqq 47$ の 48 個の余りをとることができ，

$G=6$ に対しては，$N_2=2016+[N_2*48]$ より，$[N_2*48]=0$，1 の 2 個の余りがとれる。

（i）～（iii）より，② を満たす N_2 の個数は，$9+1+5\times48+2=252$（個）である。 …答

(2) 正十二面体の 1 つの面は正五角形であり，1 つの辺には 2 つの面がついているから，

求める辺の数は $\dfrac{12\times5}{2}=30$（本）である。 …答

(3) 題意より，$\alpha^2-(t-7)\alpha+1=0 \iff 1-t\alpha+\alpha^2=-7\alpha$ が成り立つ。

同様に，$1-t\beta+\beta^2=-7\beta$ も成り立つから，(与式)$=49\alpha\beta$

解と係数の関係より，$\alpha\beta=1$ であるから，(与式)$=49$ …答

4

次の各問いに答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ のとき $\cos^2\theta+\cos^8\theta$ の値を求めよ。

(2) $(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=\dfrac{9}{5}$ のとき，x^2y の取りうる範囲を求めよ。

(3) 関数

$$f(x)=\frac{e^x}{\sin x}$$

の $0<x<\pi$ における最小値を求めよ。

(4) $0<k<2$ であるとき，$y=-x^2+2x$ と $y=kx$ とで囲まれる図形の面積を S_1，$y=-x^2+2x$ と $y=kx$ と $x=2$ とで囲まれる図形の面積を S_2 とするとき，S_1+S_2 を最小にする k の値を求めよ。

(5) 整式 $f(x)$ が

$$f(0)=0,\quad xf(x)+\int_x^0 f(t)\,dt=9x^4-6x^2$$

を満たしている。このとき x 軸と $y=f(x)$ のグラフとで囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) 与式より $\sin^2\theta=1-\sin\theta$ であるから，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-(1-\sin\theta)=\sin\theta$$

また，$\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$ と考えると，$-1<\sin\theta<1$ より $\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

だから

$$\begin{aligned}\cos^2\theta+\cos^8\theta&=\cos^2\theta+(\cos^2\theta)^4=\sin\theta+\sin^4\theta\\&=\sin\theta+(1-\sin\theta)^2=\sin^2\theta-\sin\theta+1\\&=(1-\sin\theta)-\sin\theta+1=2-2\sin\theta\\&=2-2\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=3-\sqrt{5}\end{aligned}$$ …答

(2) $\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおき，$\log_2 x^2y=2\log_2 x+\log_2 y=2X+Y$ の範囲を考える。$2X+Y=k$ とおいて，$X^2+Y^2=\dfrac{9}{5}$ との共有点をもつ範囲を考えればよい。

$Y=-2X+k$ を $X^2+Y^2=\dfrac{9}{5}$ に代入すると

$$X^2+(-2X+k)^2=\frac{9}{5}$$

$$5X^2-4kX+k^2-\frac{9}{5}=0$$

$$\frac{(\text{判別式})}{4}=4k^2-5\left(k^2-\frac{9}{5}\right)=9-k^2\geqq0 \qquad \therefore\ -3\leqq k\leqq3$$

よって $-3\leqq\log_2 x^2y\leqq3$ となるので，$\dfrac{1}{8}\leqq x^2y\leqq8$ …答

(3) $f'(x)=\dfrac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^2 x}$

増減表は下図。

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	最小	↗	

よって，最小値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$ …答

(4) $y=-x^2+2x$ と $y=kx$ を連立すると

$-x^2+2x=kx \qquad \therefore\ x=0,\ 2-k$

よって

$$S_1=-\int_0^{2-k}x\{x-(2-k)\}dx=\frac{1}{6}(2-k)^3$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot k\cdot 2k-\left(-\int_{2-k}^{2}\{x-(2-k)\}(x-2)dx\right)=k^2-\frac{1}{6}k^3$$

となるので

$$S_1+S_2=\frac{1}{6}(2-k)^3+k^2-\frac{1}{6}k^3=-\frac{1}{3}k^3+2k^2-2k+\frac{4}{3}=S(k)$$

とおくと

$$S'(k)=-k^2+4k-2=0$$

を解いて，$0<k<2$ から $\quad k=2-\sqrt{2}$

増減表は下図となるから，求める k は $k=2-\sqrt{2}$ …答

k	(0)		$2-\sqrt{2}$		(2)
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	最小	↗	

(5) 与式を x で微分すると

$$1\cdot f(x)+x\cdot f'(x)-f(x)=36x^3-12x$$

$$x\{f'(x)-(36x^2-12)\}=0$$

$x\neq0$ のとき $f'(x)=36x^2-12$ であり，$f(x)$ は整式だから，これは $x=0$ でも成立する。この両辺を積分すると

$$f(x)=12x^3-12x+C$$

$f(0)=0$ だから $C=0$ となるので，$f(x)=12x^3-12x=12(x-1)(x+1)$ となる。

対称性を考えて

$$2\int_{-1}^{0}(12x^3-12x)dx=2\Big[3x^4-6x^2\Big]_{-1}^{0}=6$$ …答

［講評］

1 (1)(2)とも基本問題であるが、(1)で $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ に気付かないと正解ができない。また、(2)では解答の書き方が難しい。

2 (2)までは正解したい問題。ただし、$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を知っているか、すぐに算出できないと難しい問題である。なお、YMS の授業では、$\cos\dfrac{\pi}{5}$ は覚えるように指導しており、その成果が発揮される問題と言える。

3 (1)は難問ではないが、試験時間を考えると、(1-2) は手がでないだろう。(2)は多面体定理を知っていれば即答でき、(3)も基本問題であるので、確実に取りたい。

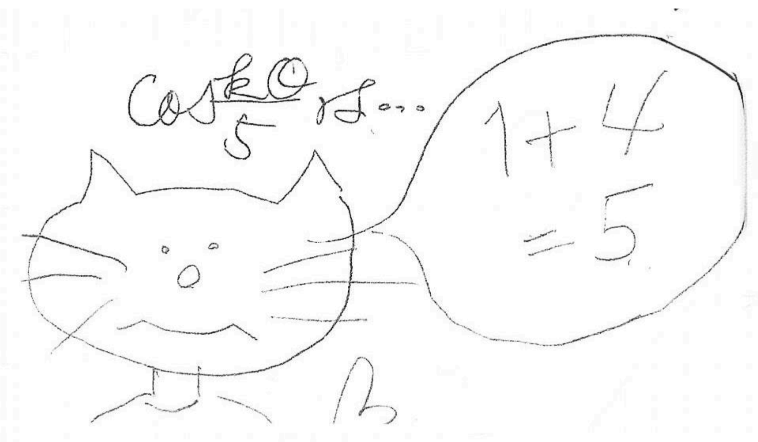
4 どれも基本問題なので、ここは全問確実に取りたい。

全体として、Ⅰ期より易化した印象だが、計算力と知識を要する問題が多く、高得点をとるのは難しいだろう。60％が 1 次合格ラインか。

YMS 2017年度 解答速報

昭和大学 医学部 Ⅱ期 数学

大的中

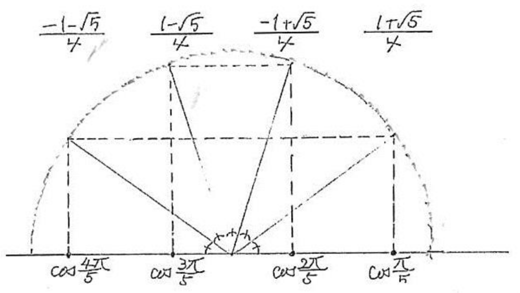


教科書応用数学 第1回 4月25日の授業、天国への数学、正月特訓など

3回済です

$\boxed{002}$ $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, …などは瞬時にわかる。

1+4=5から4つの数を考えて、小さい順に並べる。



$\boxed{2}$ 上図より

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = (4\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1)$$

$$= 16\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\theta - \cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{5}\right)\left(\cos\theta - \cos\frac{4\pi}{5}\right)$$

と瞬時に分かります！

医大別直前講習会

昭和Ⅱ期 より 大的中！！

$\boxed{1}$ (1) $\frac{x+y}{12}=\frac{y+z}{13}=\frac{z+x}{5}$ のとき，$x:y:z$ を求めよ．

(2) 方程式 $x^2+3x+1=0$ の2つの解を α，β とするとき，$(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$ の値を求めよ．

(3) x についての方程式 $x^4+ax^3+(a+3)x^2+16x+b=0$ の解のうちの2つは1と3であるという．このとき，a と b の値を求めよ．また，方程式の残りの2解を求めよ．

$z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ （i は虚数単位）とおく。

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

$\boxed{1}$ (1) 長さ $3\sqrt{2}$ の線分 PQ が座標平面上にあり，点 P は直線 $y=x$ 上を，点 Q は直線 $y=-x$ 上を動くとする．このとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R の x 座標の最大値を求めよ．

(2) $x+y\leqq 1$，$2y\geqq(x-1)^2$ のとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ．

(3) $-x+y\leqq 2$，$-x^2+y\geqq 0$ を満たす x，y に対して，$3x-y$ のとる値の最小値と最大値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{4}$ (1) 直線 (A) $y=ax$，$a\neq 0$ と曲線 (B) $y=x^4+6x^3+9x^2$ がある．(A) のグラフと (B) のグラフは点 P$(b,\ c)$ で接し，原点 O で交わる．このとき，a，b，c の値を求めよ．

また，線分OPと(B)のグラフで囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が次の2つの条件

（i） $\int_0^1 f(t)\,dt=1$

（ii） すべての実数 x に対して

$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{x^2}{9}\int_0^a f(t)\,dt \quad (\ a \text{ は正の定数}\ )$$

を満たすとき，$f(x)$ および定数 a の値を求めよ．

(3) 次の等式

$$f(x)=30x+x^2\int_0^1 g(x)\,dx$$

$$g(x)=30x^2+x\int_0^1 f(x)\,dx$$

を満たす関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ．