YMS 2018年度 解答速報 杏林大学医学部 数学

II　一辺の長さが6で，座標空間内の原点Oを重心とする正三角形ABCが xy 平面内にあり，これと合同な正三角形によって囲まれた，図1のような正八面体ABC－DEF が $z \geqq 0$ の領域にある．点Aは x 軸上 $x>0$ の領域にあり，三角形DEFの重心は z 軸上に存在する．辺BCの中点をM，$0<t<1$ を満たす実数 t に対して，辺ADを $t:1-t$ に内分する点をPとして，以下の問いに答えよ．

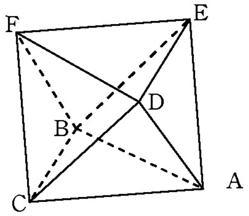


図1

(a)　点Aの x 座標は $\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，点Dの z 座標は $\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ である．

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{MF}}=\left(\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}},\ 0,\ \boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}\right)$ である．

正八面体の一辺を共有する隣り合う2つの面のなす角を θ とすると，

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ が成り立つ．

(c)　点Pを通り xy 平面に平行な平面で正八面体を切ったとき，断面の図形は，周の長さが $\boxed{シス}$ である $\boxed{セ}$ 角形となる．

t を $0<t<1$ の範囲で変化させると，$t=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ のとき，この断面の面積は最大値 $\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}\sqrt{\boxed{ト}}$ をとり，断面の外接円の半径が $\boxed{ナ}$ となる．

解答
(a)　ア：2，イ：3，ウ：2，エ：6
(b)　オ：－，カ：3，キ：2，ク：6，ケコ：－1，サ：3
(c)　シス：18，セ：6，ソ：1，タ：2，チツ：27，テ：2，ト：3，ナ：3

(a)　真上から見た図は右図1のようになるので

点Aの x 座標は ${}^{ア}2\sqrt{{}^{イ}3}$ となる。

また，ACの中点をNとおき，右図2のように θ と X 軸および点Hを設定すると

$$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-(6\sqrt{2})^2}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}$$

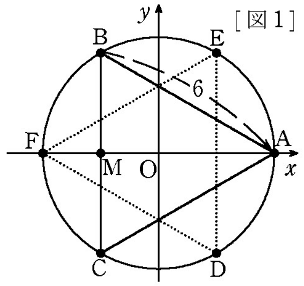
$$=-\frac{1}{3}$$

であるから，点Dの z 座標は図3のDHと等しく，それは

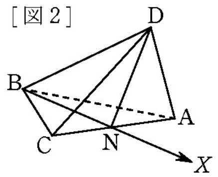
$$\mathrm{DN}\sin(\pi-\theta)=3\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$={}^{ウ}2\sqrt{{}^{エ}6}$$

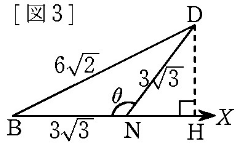
となる。



［図2］



［図3］



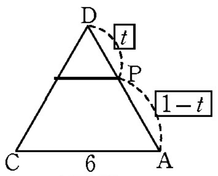
(b)　F$(-2\sqrt{3},\ 0,\ 2\sqrt{6})$，M$(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{MF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(-2\sqrt{3},\ 0,\ 0)-(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$$

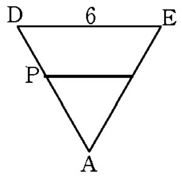
$$=\left({}^{オ}-\sqrt{{}^{カ}3},\ 0,\ {}^{キ}2\sqrt{{}^{ク}6}\right)$$

また，$\cos\theta=\dfrac{{}^{ケコ}-1}{{}^{サ}3}$ である。

(c)　点Pを通り xy 平面に平行な平面で正八面体を切ったとき，断面の図形は ${}^{セ}6$ 角形となり，その周は，図4のような正三角形3つと図5のような正三角形3つの太線部分の長さの和を考えればよいから



［図4］



［図5］

$$6(1-t)\times 3+6t\times 3={}^{シス}18$$

断面の図形は図6のようになるので，その面積は

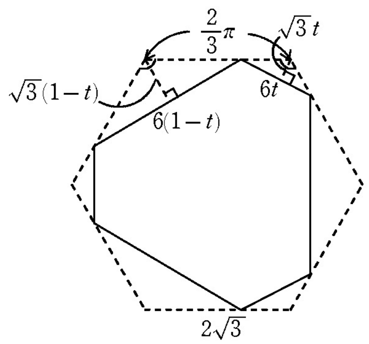
$$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2\times 6-3\left(\frac{1}{2}\cdot 6t\cdot\sqrt{3}\,t+\frac{1}{2}\cdot 6(1-t)\cdot\sqrt{3}(1-t)\right)$$

$$=-18\sqrt{3}\,t^2+18\sqrt{3}\,t+9\sqrt{3}$$

$$=-18\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

となる。これは $t=\dfrac{{}^{ソ}1}{{}^{タ}2}$ のとき最大値

$\dfrac{{}^{チツ}27}{{}^{テ}2}\sqrt{{}^{ト}3}$ をとり，このとき断面は一辺の長さが3の正六角形となるので，その外接円の半径は ${}^{ナ}3$ となる。

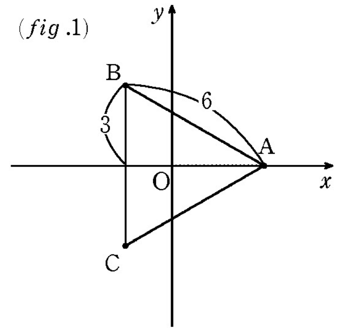


［図6］

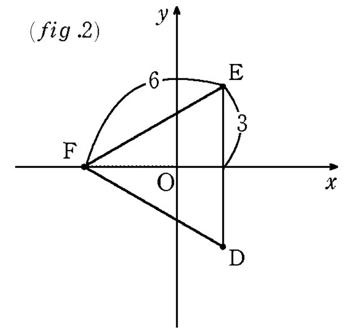
【別解】

(a)　xy 平面上の点について考えると，(fig.1) となり，3点D，E，Fが存在する平面を考えると，(fig.2) のようになる．

(fig.1)



(fig.2)



したがって，点Aを $(2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，点Dを $(\sqrt{3},\ -3,\ z)$ とおける．AD＝6 であるから，

$$\mathrm{AD}=\sqrt{(\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2+(-3-0)^2+(z-0)^2}=6$$

$$\Longleftrightarrow\ 12+z^2=36$$

よって，$z=2\sqrt{6}$ となる．

(b)　M$(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，F$(-2\sqrt{3},\ 0,\ 2\sqrt{6})$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MF}}=(-\sqrt{3},\ 0,\ 2\sqrt{6})$$

である．

点Fから xy 平面に下した垂線の足をHとおくと，

$$\mathrm{MH}=\sqrt{3},\ \mathrm{FH}=2\sqrt{6}$$

であるから，

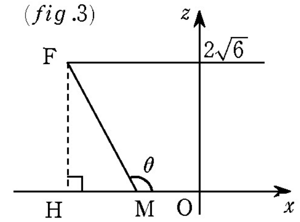
$$\mathrm{FM}=\sqrt{\mathrm{MH}^2+\mathrm{FM}^2}=3\sqrt{3}$$

したがって，

$$\cos\angle\mathrm{FMH}=\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{FM}}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\theta=\cos(\pi-\angle\mathrm{FMH})=-\frac{1}{3}$$

(fig.3)



(c)　断面は6角形になる．ここで，周の長さを L とおくとき，$t\longrightarrow 0$，$t\longrightarrow 1$ のときに図形は正三角形に近づく．この周の長さが18であるから，解答のように周の長さが定数となるとき，$L=18$ であることがわかる．

また，この断面を図示すると fig.4 のようになる．

この6角形図形の面積は，1辺の長さが $6(1+t)$ の正三角形の面積から，一片の長さが $6t$ の正三角形3個分の面積を引けばよいので，

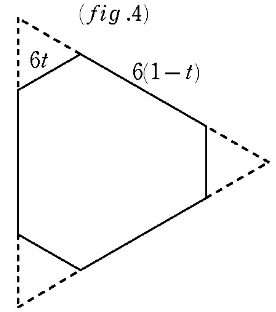
$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\{6(1+t)\}^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(6t)^2\times 3$$

$$=9\sqrt{3}(1+t)^2-27\sqrt{3}\,t^2$$

$$=-18\sqrt{3}\,t^2+18\sqrt{3}\,t+9\sqrt{3}$$

となる．

(fig.4)



I 次のように定義される2つの数列を $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ とする．

$$a_1=1,\ b_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-b_n,\ b_{n+1}=4a_n+7b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(a) $a_2=\boxed{\text{ア}}$ であり，数列 $\{a_n\}$ は自然数 n に対し次式を満たす．

$$a_{n+2}-pa_{n+1}=p(a_{n+1}-pa_n),\quad ただし\ p=\boxed{\text{イ}}.$$

したがって，数列 $\{a_{n+1}-pa_n\}$ は，公比 $\boxed{\text{ウ}}$ の等比数列であり，

$$a_{n+1}-pa_n=\boxed{\text{エオ}}\times\boxed{\text{カ}}^{\,n-1} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

(b) 式 $(*)$ の両辺を p^{n+1} で割ると，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{p^n}\right\}$ の階差数列が定数 $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ となることがわかる．これより，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=\left(\boxed{\text{サシ}}\,n+\boxed{\text{ス}}\right)\times\boxed{\text{セ}}^{\,n-2}$$

と求められる．

(c) 2つの数列を用いて表される極限値，および無限級数の和について，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2a_n+b_n}=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$$

が成立する．

解答 (a) $\boxed{\text{ア}}$：1，$\boxed{\text{イ}}$：5，$\boxed{\text{ウ}}$：5，$\boxed{\text{エオ}}$：-4，$\boxed{\text{カ}}$：5

(b) $\boxed{\text{キク}}$：-4，$\boxed{\text{ケコ}}$：25，$\boxed{\text{サシ}}$：-4，$\boxed{\text{ス}}$：9，$\boxed{\text{セ}}$：5

(c) $\boxed{\text{ソタ}}$：-1，$\boxed{\text{チ}}$：2，$\boxed{\text{ツ}}$：5，$\boxed{\text{テト}}$：16

$a_1=1$，$b_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-b_n \cdots$ ①，$b_{n+1}=4a_n+7b_n \cdots$ ②

(a) ① で $n=1$ とすると

$$a_2=3a_1-b_1=3-2={}^{ア}1$$

また，① より

$$b_n=-a_{n+1}+3a_n \cdots\cdots ③$$

だから，これを ② に代入すると

$$-a_{n+2}+3a_{n+1}=4a_n+7(-a_{n+1}+3a_n)$$

$$\Longleftrightarrow\ a_{n+2}-5a_{n+1}=5(a_{n+1}-5a_n)$$

よって，$p={}^{イ}5$ となり，この式から数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は公比 ${}^{ウ}5$ の等比数列とわかり

$$a_{n+1}-5a_n=5^{n-1}(a_2-5a_1)=5^{n-1}(1-5)={}^{エオ}-4\times{}^{カ}5^{n-1} \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ。

(b) $(*)$ の両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}-\frac{a_n}{5^n}=-\frac{4}{25}$$

となるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{5^n}\right\}$ の階差数列が定数 $\dfrac{{}^{キク}-4}{{}^{ケコ}25}$ となる．

$$\frac{a_n}{5^n}=\frac{a_1}{5^1}+(n-1)\left(-\frac{4}{25}\right)=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}(n-1)=-\frac{4}{25}n+\frac{9}{25}$$

$$\Longleftrightarrow\ a_n=\left(-\frac{4}{25}n+\frac{9}{25}\right)\cdot5^n=({}^{サシ}-4n+{}^{ス}9)\times{}^{セ}5^{n-2}$$

(c) (b) の結果を ③ に用いると

$$b_n=-(-4n+5)\cdot5^{n-1}+3(-4n+9)\cdot5^{n-2}=(8n+2)\cdot5^{n-2}$$

となるので

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(-4n+9)\cdot5^{n-2}}{(8n+2)\cdot5^{n-2}}=\frac{-4n+9}{8n+2}=\frac{-4+\frac{9}{n}}{8+\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{-4}{8}=\frac{{}^{ソタ}-1}{{}^{チ}2}$$

また

$$2a_n+b_n=2\cdot(-4n+9)\cdot5^{n-2}+(8n+2)\cdot5^{n-2}=20\cdot5^{n-2}=4\cdot5^{n-1}$$

であるから，$0<\dfrac{1}{5}<1$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2a_n+b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot5^{n-1}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{{}^{ツ}5}{{}^{テト}16}$$

【別解】b_n の一般項を求めなくてもよい．

① の両辺を a_n で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3-\frac{b_n}{a_n}\ \Longleftrightarrow\ \frac{b_n}{a_n}=3-\frac{a_{n+1}}{a_n}=3-\frac{(-4n+5)\cdot5^{n-1}}{(-4n+9)\cdot5^{n-2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{3-\frac{\left(-4+\frac{5}{n}\right)\cdot5}{-4+\frac{9}{n}}\right\}=3-5=-2$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{b_n}{a_n}}=-\frac{1}{2}$$

さらに，

$$2a_n+b_n=2a_n+(-a_{n+1}+3a_n)=5a_n-a_{n+1}$$

と変形してから $a_n=(-4n+9)\cdot5^{n-2}$ を代入すればよい．

Ⅲ x を実数，$f(x)=|x^2-x-6|$ として，以下の問いに答えよ．

(a) 不等式 $f(x)>2x+6$ の解は

$$x<\frac{\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}},\quad \boxed{オカ}<x<\boxed{キ},$$

$$\frac{\boxed{ア}+\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}<x$$

である．

(b) 方程式 $f(x)=2x+k$ が異なる 3 つの実数解を持つように，定数 k の値を求めると，

$k=\boxed{ク}$ または $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ となる．

(c) 区間 $-3<x<4$ において，$y=\sin(f(x))$ のグラフには，極大となる点が $\boxed{シ}$ 個存在する．これらの点のうち，極大値が 1 未満となるのは，$x=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ のときである．

解答 (a) $\boxed{ア}$: 3，$\boxed{イウ}$: 57，$\boxed{エ}$: 2，$\boxed{オカ}$: -1，$\boxed{キ}$: 0

(b) $\boxed{ク}$: 4，$\boxed{ケコ}$: 25，$\boxed{サ}$: 4，(c) $\boxed{シ}$: 5，$\boxed{ス}$: 1，$\boxed{セ}$: 2

$$f(x)=|x^2-x-6|=|(x+2)(x-3)|$$

であるから，

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-6 & (x\leqq -2,\ 3\leqq x \text{ のとき}) \\ -x^2+x+6 & (-2\leqq x\leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(a) (ⅰ) $-2\leqq x$，$3\leqq x$ のとき

$$x^2-x-6>2x+6$$
$$\iff x^2-3x-12>0$$
$$\iff x<\frac{3-\sqrt{57}}{2},\quad \frac{3+\sqrt{57}}{2}<x$$

これは，$x\leqq -2$，$3\leqq x$ を満たす．

(ⅱ) $-2\leqq x\leqq 3$ のとき

$$-x^2+x+6>2x+6$$
$$\iff x^2+x<0$$
$$\iff -1<x<0$$

これは，$-2\leqq x\leqq 3$ を満たす．

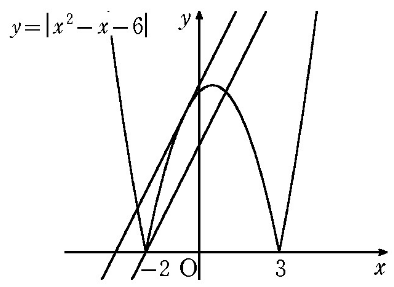
(ⅰ)，(ⅱ)より，$x<\dfrac{3-\sqrt{57}}{2}$，$-1<x<0$，$\dfrac{3+\sqrt{57}}{2}<x$

(b) 右図のように

(ア) 点$(-2,\ 0)$を通るとき

(イ) $-2<x<3$ で $y=f(x)$ と接するとき

の 2 通りである．



(ア) 点$(-2,\ 0)$を通るとき

$y=2x+k$ に代入すると，

$$0=2\cdot(-2)+k \iff k=4$$

(イ) $-2<x<3$ で $y=f(x)$ と接するとき

$$y=-x^2+x+6,\quad y'=-2x+1$$

であるから，$y'=2$ を解くと，

$$-2x+1=2 \iff x=-\frac{1}{2}$$

このとき，接点は，$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{21}{4}\right)$ であり，$y=2x+k$ に代入すると $k=\dfrac{25}{4}$．

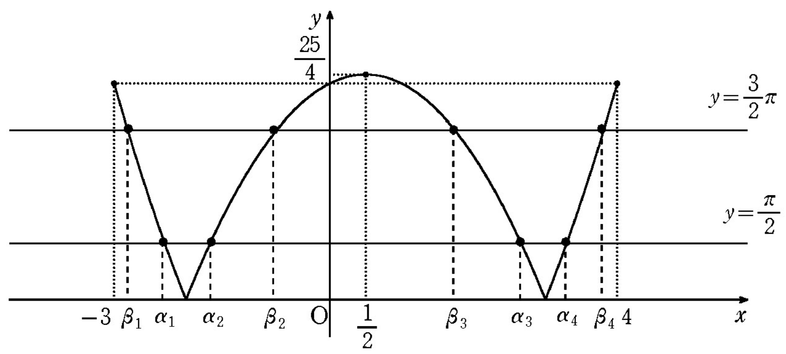
(c) $y=\sin(f(x))$ より，

$$\frac{dy}{dx}=\cos(f(x))\cdot f'(x)$$

$-3<x<4$ のとき，$0\leqq f(x)<\dfrac{25}{4}$ であり，$\cos(f(x))=0$ となるとき，

$$f(x)=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

である．



上のグラフのように，$y=f(x)$ と $y=\dfrac{\pi}{2}$ との 4 つの交点の x 座標を α_1，α_2，α_3，α_4 とおき，$y=f(x)$ と $y=\dfrac{3}{2}\pi$ との 4 つの交点の x 座標を β_1，β_2，β_3，β_4 とおく．

$f(\alpha_i)=\dfrac{\pi}{2}$，$f(\beta_i)=\dfrac{3}{2}\pi$ であり，

$$\cos(f(\alpha_i))=0,\ \cos(f(\beta_i))=0,\ \sin(f(\alpha_i))=1,\ \sin(f(\beta_i))=1$$

となる．また，

$$-3<x<-2,\ \frac{1}{2}<x<3 \text{ のとき } f'(x)<0$$
$$-2<x<\frac{1}{2},\ 3<x<4 \text{ のとき } f'(x)>0$$

であるから，増減は以下のようになる．

x	-3	$\cdots$	β_1	$\cdots$	α_1	$\cdots$	-2	$\cdots$	α_2	$\cdots$	β_2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y		↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$\sin\left(\frac{25}{4}\right)$

$\frac{1}{2}$	$\cdots$	β_3	$\cdots$	α_3	$\cdots$	3	$\cdots$	α_4	$\cdots$	β_4	$\cdots$	4
0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin\left(\frac{25}{4}\right)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	

したがって，極大となる点は 5 個あり，極大値が 1 未満となるのは，$x=\dfrac{1}{2}$ のときである．

【補足①】

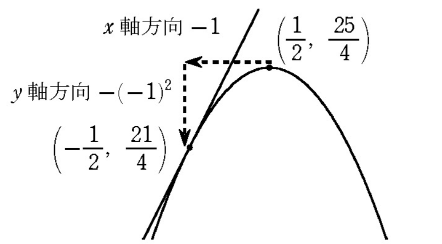
(c) は丁寧に解いたが，問題文から，極大値が 1 となる点がが存在している．

これは，$\sin(f(x))=1$ すなわち，$f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ となるときであり，グラフから 4 個とわかる．

さらに，あと 1 つ $x=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ となる極大となる点が存在するので，極大となる点は合計 5 個である．$f(x)$ が $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称性であるから，あと 1 つの極値は $x=\dfrac{1}{2}$ であることが予想できる．

【補足②】

$y=x^2$ のグラフは軸から x 軸方向に $+d$ 離れた点における接線の傾きが $2d$ である．つまり，$y=-x^2+x+6$ に接する傾き 2 の接線の接点は，軸 $x=\dfrac{1}{2}$ から x 軸方向に -1 離れた点であり，$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{21}{4}\right)$ であることがわかる．



Ⅳ　実数 x に対して，$f(x)$ は，$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x)=-|x|\log_e|x|$ であり，$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$

を満たす関数として定義する．必要があれば $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log_e x}{x}=0$ を用いてよい．

(a)　$f(0)=\boxed{ア}$ である．

(b)　$f(x)$ の最大値を α，$f(x)$ の最大値を与える x の値を β とすると，$\log_e\alpha=\boxed{イウ}$，$\log_e|\beta|=\boxed{エオ}$ が成り立つ．

(c)　$t \fallingdotseq 0$ を満たす実数 t に対し，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線を考える．接線が点 $(-1,\ 1)$ を通るとき，接点の x 座標 t は，

$$t+\log_e|t|=\boxed{カ}\ または\ \boxed{キク}$$

を満たし，このような接線は $\boxed{ケ}$ 本存在する．

(d)　$0<k<|\beta|$ を満たす定数 k に対し，$x \geqq k$ の領域において直線 $x=k$，曲線 $y=f(x)$ および x 軸によって囲まれる図形の面積を $S(k)$，この図形を y 軸の回りに1回転してできる立体の体積を $V(k)$ とすると，

$$\lim_{k\to0}S(k)=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}},\quad \lim_{k\to0}V(k)=\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi$$

が成り立つ．

解答　(a) $\boxed{ア}$: 0　(b) $\boxed{イウ}$: -1，$\boxed{エオ}$: -1

(c) $\boxed{カ}$: 0，$\boxed{キク}$: -2，$\boxed{ケ}$: 3

(d) $\boxed{コ}$: 1，$\boxed{サ}$: 4，$\boxed{シ}$: 2，$\boxed{ス}$: 9

$$f(x)=\begin{cases}-x\log x & (x>0)\\ x\log(-x) & (x<0)\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}-\log x-1 & (x>0)\\ \log(-x)+1 & (x<0)\end{cases}$$

であり

$$f(-x)=-|-x|\log|-x|=-|x|\log|x|=f(x)$$

を満たすから，$y=f(x)$ は偶関数で y 軸対称である。

(a)　$x>0$ のとき，$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと $x\longrightarrow+0$ で $t\longrightarrow\infty$ だから

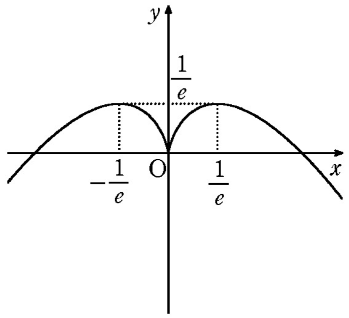
$$\lim_{x\to+0}\{-x\log x\}=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}={}^{ア}0 \cdots\cdots ①$$

偶関数だから，$x<0$ のときも同様の結果が得られる。

(b)　$x>0$ のとき $f'(x)=-\log x-1$ だから

増減表は下図。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり

$\alpha=\dfrac{1}{e}$，$|\beta|=\dfrac{1}{e}$ とわかるから

$$\log\alpha={}^{イウ}-1,\quad \log|\beta|={}^{エオ}-1$$

となる。

(c)　$x>0$ のとき，$(t,\ f(t))$ における接線は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)=(-\log t-1)(x-t)-t\log t$$

これが $(-1,\ 1)$ を通るとき

$$1=(-\log t-1)(-1-t)-t\log t=t+\log t+1$$

$$\therefore\ t+\log t=0$$

$x<0$ のとき，$(t,\ f(t))$ における接線は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)=\{\log(-t)+1\}(x-t)+t\log(-t)$$

これが $(-1,\ 1)$ を通るとき

$$1=\{\log(-t)+1\}(-1-t)+t\log(-t)=-t-\log(-t)-1$$

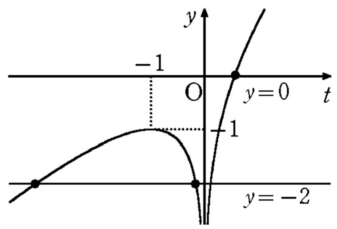
$$\therefore\ t+\log(-t)=-2$$

以上から

$$t+\log|t|={}^{カ}0\ または\ {}^{キク}-2$$

を満たす。$f(t)=t+\log|t|$ $(t \fallingdotseq 0)$ とおくと

$$f'(t)=1+\frac{1}{t}$$

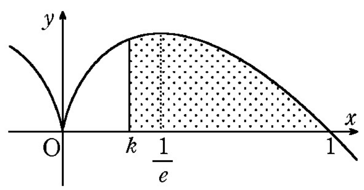


であり，増減表は下図。

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ｜ $-\infty$	↗	∞

本問では，$y=f(t)$ と $y=0$ および $y=-2$ との交点の個数が接線の本数と一致するので，$t>0$ のときと $t<0$ のときとで方程式が異なることに注意すると，右上図より $t+\log|t|=0$ または -2 を満たす接線は ${}^{ケ}3$ 本存在する。

(d)　$0<k<\dfrac{1}{e}$ であり，右図を考えて



$$S(k)=\int_k^1(-x\log x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}\log x\right]_k^1-\int_k^1\left(-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{k^2}{2}\log k+\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_k^1$$

$$=\frac{k^2}{2}\log k+\frac{1}{4}-\frac{k^2}{4}$$

① より $\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{k^2}{2}\log k=0$ だから

$$\lim_{k\to0}S(k)=\frac{{}^{コ}1}{{}^{サ}4}$$

また，回転体はバームクーヘン分割を考えて

$$V(k)=\int_k^1 2\pi x(-x\log x)dx$$

$$=-2\pi\left\{\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_k^1-\int_k^1\frac{x^2}{3}dx\right\}$$

$$=-2\pi\left(-\frac{k^3}{3}\log k-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_k^1\right)$$

$$=-2\pi\left(-\frac{k^3}{3}\log k-\frac{1}{9}+\frac{k^3}{9}\right)$$

① より $\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{k^3}{3}\log k=0$ だから

$$\lim_{k\to0}V(k)=-2\pi\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{{}^{シ}2}{{}^{ス}9}\pi$$

【講評】

Ⅰ

連立漸化式の問題．誘導に乗っていけば数列 a_n を求めることができるだろう．また (c) の極限値の問題も典型的である．

Ⅱ

立体図形の問題．座標軸をとるという誘導に従って求めていく．各点の座標が出せれば (b) までは解けるだろう．(c) は正確に断面を得られない受験生もいただろう．最大値は中点のときかなと予想した受験生も多かっただろう．

Ⅲ

絶対値のついた 2 次関数のグラフの問題．(a)(b) は基本的で落とせない．(c) は合成関数の極値の問題である．三角関数なので，極大値が 1 になる点は探しやすい．あともう一つだけ極大値があるとするならば $x=\frac{1}{2}$ だろうと予想した受験生も多かっただろう．

Ⅳ

関数グラフ．絶対値の扱いが面倒だった．$f(x)$ が偶関数であることに気付くと考えやすい．回転体の体積は，バームクーヘン分割で考えると計算量が少なくて済む．

全体的に昨年よりは易化している．一部計算量が多い問題があったが，感覚的に埋まる空欄もあり，1次合格ラインは 6 割程度だろう．