［1］ $f(x)=\dfrac{1}{27}x^3(x-5)^2$ とする．

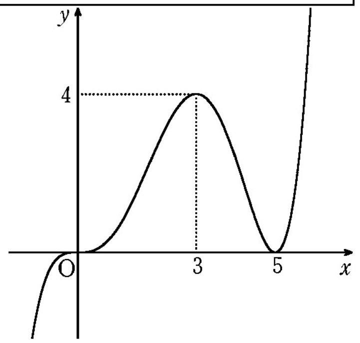
(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を，極値を調べて描け．ただし，変曲点は求めなくともよい．

(2) $y=f(x)$ と $y=x$ の共有点はいくつあるか．

(1)
$$f'(x)=\frac{1}{27}\cdot 3x^2(x-5)^2+\frac{1}{27}x^3\cdot 2(x-5)$$
$$=\frac{1}{27}x^2(x-5)\{3(x-5)+2x\}$$
$$=\frac{5}{27}x^2(x-3)(x-5)$$

増減表は下図。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗	4	↘	0	↗



極大値は $x=3$ で $f(3)=4$，極小値は $x=5$ で $f(5)=0$であり，グラフの概形は右上図となる。

(2) $y=f(x)$ と $y=x$を連立して
$$\frac{1}{27}x^3(x-5)^2=x$$
$$\frac{1}{27}x\{x^2(x-5)^2-27\}=0$$

$x^2(x-5)^2=27$ のとき $x(x-5)=\pm 3\sqrt{3}$ より
$$x^2-5x\mp 3\sqrt{3}=0 \qquad \therefore\ x=\frac{5\pm\sqrt{25\pm 12\sqrt{3}}}{10}$$

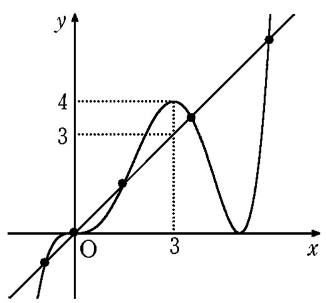
以上から，交点が $x=0$，$\dfrac{5\pm\sqrt{25\pm 12\sqrt{3}}}{10}$ と5つ求まるので，求める共有点は5つある。 …答

別解

方程式 $f(x)=x$ は5次方程式であるから，異なる実数解の個数は高々5つである．

また，
$$f(-1)<-1,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)>-\frac{1}{2}$$
$$f(1)<1,\ f(3)>3$$
$$f(5)<5,\ f(6)>6$$

となるので，中間値の定理より
$$-1<x<-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}<x<1,$$
$$1<x<3,\ 3<x<5,\ 5<x<6$$



のそれぞれの区間に少なくとも1つ実数解を持つ．したがって，方程式 $f(x)=x$ の異なる実数解の個数は5個であり，共有点は5つである．

［2］ a，b，$c>0$ とする．

(1) 不等式 $8abc\leqq(a+b)(b+c)(c+a)$ を示せ．

(2) $x=b+c-a$，$y=c+a-b$，$z=a+b-c$ とするとき，a，b，c をそれぞれ x，y，z で表せ．

(3) 不等式 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqq abc$ を示せ．

(1) $a>0$，$b>0$，$c>0$ だから，相加平均・相乗平均の関係式より
$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc$$

等号成立は，$a=b$ かつ $b=c$ かつ $c=a$，すなわち $a=b=c$ のとき。

(2) $x=b+c-a$ ……①，$y=c+a-b$ ……②，$z=a+b-c$ ……③

①＋②＋③ より
$$x+y+z=a+b+c \cdots\cdots ④$$

④－① から
$$y+z=2a \qquad \therefore\ a=\frac{y+z}{2} \quad \cdots 答$$

④－② から
$$x+z=2b \qquad \therefore\ b=\frac{x+z}{2} \quad \cdots 答$$

④－③ から
$$x+y=2c \qquad \therefore\ c=\frac{x+y}{2} \quad \cdots 答$$

(3) 対称性より $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定してよい。このとき $b+c-a>0$，$c+a-b>0$ である。

（ｉ） $a+b-c>0$ のとき

$x>0$，$y>0$，$z>0$ だから，(1) の不等式を用いて
$$8xyz\leqq(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$8(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqq 2c\cdot 2a\cdot 2b$$
$$\therefore\ (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqq abc$$

（ⅱ） $a+b-c\leqq 0$ のとき
$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqq 0,\ 0<abc \text{ より}$$
$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqq abc$$

以上（ｉ）（ⅱ）から，$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqq abc$ が成立する。

［3］ θ を $0<\theta<\pi$ を満たす実数とする．空間内の4点

A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$，C$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1)$，D$(-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ 1)$

を頂点とする四面体ABCD を考える．

(1) 四面体ABCD を平面 $z=t$ $(0<t<1)$ で切った切り口は平行四辺形であることを示し，2つの対角線の長さを θ と t を用いて表せ．

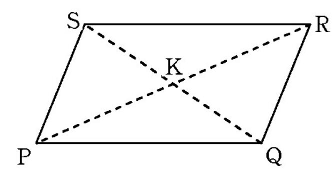
(2) 四面体ABCD を z 軸の回りに回転させるとき，四面体が通過してできる立体の体積を θ を用いて表せ．

(1) 線分AC，AD，BD，BC と平面 $z=t$ との交点を P，Q，R，Sとおくと，それぞれの線分を $t:(1-t)$ に内分する点であるから，
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}1-t+t\cos\theta\\ t\sin\theta\\ t\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}1-t-t\cos\theta\\ -t\sin\theta\\ t\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}-1+t-t\cos\theta\\ -t\sin\theta\\ t\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}-1+t+t\cos\theta\\ t\sin\theta\\ t\end{pmatrix}$$

となる．このとき，
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}-2t\cos\theta\\ -2t\sin\theta\\ 0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{SR}}=\begin{pmatrix}-2t\cos\theta\\ -2t\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となり，切り口は平行四辺形である．（証明終）

またこのとき，
$$\mathrm{PR}^2=\{2(1-t+t\cos\theta)\}^2+(2t\sin\theta)^2$$
$$\mathrm{PR}=2\sqrt{2(1-\cos\theta)t^2-2(1-\cos\theta)t+1}$$
$$\mathrm{QS}^2=\{2(1-t+t\cos\theta)\}^2+(2t\sin\theta)^2$$
$$\mathrm{QS}=2\sqrt{2(1+\cos\theta)t^2-2(1+\cos\theta)t+1}$$



であるから，2つの対角線の長さは，
$$2\sqrt{2(1-\cos\theta)t^2-2(1-\cos\theta)t+1},\ 2\sqrt{2(1+\cos\theta)t^2-2(1+\cos\theta)t+1} \quad \cdots 答$$

(2) 対角線の交点を K とおくとき，これは z 軸と 平面 $z=t$ との交点である．
$$\mathrm{KP}^2=2(1-\cos\theta)t^2-2(1-\cos\theta)t+1$$
$$\mathrm{KQ}^2=2(1+\cos\theta)t^2-2(1+\cos\theta)t+1$$

であり，$\mathrm{KP}^2\geqq\mathrm{KQ}^2$ を計算すると，
$$(4\cos\theta)t(1-t)\geqq 0$$

となるので，$0<t<1$ において，

$\cos\theta\geqq 0$ のとき KP≧KQ

$\cos\theta\leqq 0$ のとき KP≦KQ

となる．

したがって，回転体の体積 V は，

(ア)　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$V=\pi\int_0^1 \mathrm{KP}^2dt$$
$$=\pi\int_0^1\{2(1-\cos\theta)t^2-2(1-\cos\theta)t+1\}dt$$
$$=\frac{2+\cos\theta}{3}\pi$$

(イ)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$ のとき

$$V=\pi\int_0^1 \mathrm{KQ}^2dt$$
$$=\pi\int_0^1\{2(1+\cos\theta)t^2-2(1+\cos\theta)t+1\}dt$$
$$=\frac{2-\cos\theta}{3}\pi$$

したがって，求める体積 V は，$\dfrac{2+|\cos\theta|}{3}\pi$　…答

[4]　r を正の整数とする．親 1 人，子 r 人が次のようなゲームを行う．まず，子 r 人が一度ずつさいころを投げて，出た目 (1～6) を記入した券を受け取る．次に，$n\geqq6$ として 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚の札を箱に入れ，親が 1 枚取り出して，その札の番号を k とする．$k>6$ なら当たりは無し，$k\leqq6$ なら番号 k の券を持っている子をすべて当たりとする．このとき次の確率はいくらか．

(1)　$k>6$ である．
(2)　当たりがいない．
(3)　当たりが x 人 $(1\leqq x\leqq r)$ いる．

(1)　親が取り出した 6 より大きい札は $n-6$ 枚であるから，これを引く確率は，

$$\frac{{}_{n-6}\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_1}=\frac{n-6}{n}\quad\cdots答$$

(2)　$k\geqq7$ のときは，当たりがいない．
$1\leqq k\leqq6$ のときは，子 r 人の持つ券の番号がすべて k 以外であるとき当たりがいない．
したがって，

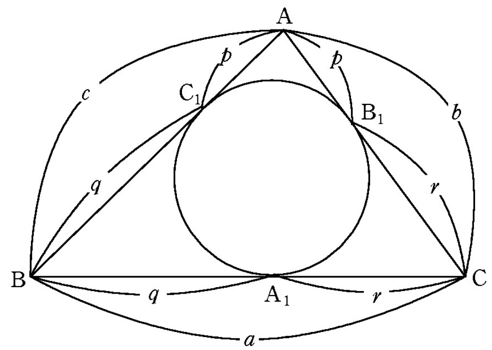
$$\frac{n-6}{n}+\frac{6}{n}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^r\quad\cdots答$$

(3)　当たりがいるので，親が取り出した札は，$1\leqq k\leqq6$ である．このとき，子 x 人の持つ券の番号が k であり，子 $r-x$ 人の持つ券の番号は k 以外であるから，

$$\frac{6}{n}\cdot{}_r\mathrm{C}_x\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{r-x}\quad\cdots答$$

[5]　△ABC の内接円が辺 BC，CA，AB に接する点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$ とする．また，各辺の長さを BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とし，$\dfrac{a+b+c}{2}=s$ とする．

(1)　長さ $\mathrm{BA_1}$，$\mathrm{CB_1}$，$\mathrm{AC_1}$ を a，b，c を用いて表せ．ただし s も用いてよい．
(2)　$\mathrm{AA_1}$ と $\mathrm{BB_1}$ の交点を R とするとき，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RA_1}}$ を a，b，c を用いて表せ．ただし s も用いてよい．
(3)　線分 $\mathrm{AA_1}$，$\mathrm{BB_1}$，$\mathrm{CC_1}$ は点 R で交わることを示せ．



(1)　$\mathrm{AC_1}=\mathrm{AB_1}=p$，$\mathrm{BA_1}=\mathrm{BC_1}=q$，$\mathrm{CA_1}=\mathrm{CB_1}=r$ とおく．
3 辺の長さの和から，

$$(q+r)+(r+p)+(p+q)=a+b+c$$
$$\iff p+q+r=\frac{a+b+c}{2}$$

$a=q+r$ であるから，

$$p=\frac{a+b+c}{2}-a=s-a$$

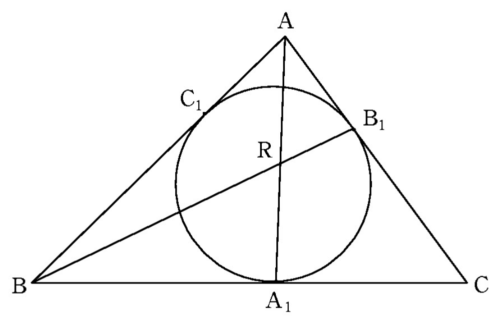
同様に，$q=s-b$，$r=s-c$ である．したがって，

$$\mathrm{BA_1}=s-b,\ \mathrm{CB_1}=s-c,\ \mathrm{AC_1}=s-a\quad\cdots答$$

(参考)

$$\mathrm{BA_1}=\frac{a-b+c}{2},\ \mathrm{CB_1}=\frac{a+b-c}{2},\ \mathrm{AC_1}=\frac{-a+b+c}{2}$$ としてもよい．

(2)



メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RA_1}}\cdot\frac{\mathrm{A_1B}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CB_1}}{\mathrm{B_1A}}=1$$
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RA_1}}\cdot\frac{s-b}{a}\cdot\frac{s-c}{s-a}=1$$
$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RA_1}}=\frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}\quad\cdots答$$

(他にも表し方はある)

(3)
$$\frac{\mathrm{AC_1}}{\mathrm{C_1B}}\cdot\frac{\mathrm{BA_1}}{\mathrm{A_1C}}\cdot\frac{\mathrm{CB_1}}{\mathrm{B_1A}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{r}\cdot\frac{r}{p}=1$$

であるから，チェバの定理の逆より，線分 $\mathrm{AA_1}$，$\mathrm{BB_1}$，$\mathrm{CC_1}$ は 1 点で交わる．

(証明終)

[講評]

100 分で大問 5 題と例年通りの形式であったが，昨年に比べ易化したが，

[1] は 5 次関数の概形，特に凸性については未知であるものとして考えているため，(2) をグラフを用いて解こうとする際には,凸性を吟味する必要がある点．
[2] は (3) の不等式を証明する際に (1) の不等式を利用するが，$x>0$，$y>0$，$z>0$のときしか利用できないため，他の場合を考える必要がある点．
[3] は (2) で θ の値によっては場合分けが必要となる点．

など，細かい部分の論証が求められるため，記述力の差が顕著に出ると思われる．
合格ラインは 70 %程度．