

1

(1) まず，傘を忘れる場合は以下の3通り．

- ・店 A に1回目の来店をしたとき忘れる $\frac{1}{7}$
- ・店 B に1回目の来店をしたとき忘れる $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{7^2}$
- ・店 A に2回目の来店をしたとき忘れる $\frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6^2}{7^3}$

したがって，傘を忘れる確率は， $\frac{1}{7} + \frac{6}{7^2} + \frac{6^2}{7^3}$

また，店 A に傘を忘れる確率は， $\frac{1}{7} + \frac{6^2}{7^3}$

求める確率は店で傘を忘れたとき，傘を忘れた店が A である確率 (条件つき確率) であるから，

$$\frac{\frac{1}{7} + \frac{6^2}{7^3}}{\frac{1}{7} + \frac{6}{7^2} + \frac{6^2}{7^3}} = \boxed{\frac{85}{127}}$$

(2) $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$ の $0 \leq x \leq 2$ における曲線の長さ L は，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \text{ に注意して，} \\ L &= \int_{x=0}^{x=2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{\frac{e^{4x} + 2 + e^{-4x}}{4}} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4e^4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}\left(e^4 - \frac{1}{e^4}\right)} \end{aligned}$$

(3) まず，1800 を素因数分解すると
 $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

また，1800 の正の約数の逆数の総和を S とおき，1800 の正の約数の総和を T とすると，

$$1800 \cdot S = T$$

が成り立つ．素因数分解の結果から，

$$T = (1+2+2^2+2^3) \cdot (1+3+3^2) \cdot (1+5+5^2) = 15 \cdot 13 \cdot 31$$

と求まるので，逆数の総和 S は

$$S = \frac{T}{1800} = \frac{15 \cdot 13 \cdot 31}{1800} = \boxed{\frac{403}{120}}$$

(4) x の2次方程式

$$x^2 - x(\log ab) + (\log a^2)(\log b) = 0$$

の判別式を D とすると， a ， b が1以外の正の定数であることに注意して

$$\begin{aligned} D &= (\log ab)^2 - 4(\log a^2)(\log b) \\ &= (\log a + \log b)^2 - 4(2\log a)(\log b) \\ &= (\log a)^2 - 6(\log a)(\log b) + (\log b)^2 \end{aligned}$$

と表せる．いま，重解を持つので

$$D = 0 \quad \therefore (\log a)^2 - 6(\log a)(\log b) + (\log b)^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

をみたす．ここで，

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad (\text{底の変換公式})$$

であることを利用すると， $\textcircled{1}$ の両辺を $\log a$ で割り，

$$\begin{aligned} \therefore 1 - 6\frac{\log b}{\log a} + \frac{(\log b)^2}{(\log a)^2} &= 0 \\ \therefore (\log_a b)^2 - 6\log_a b + 1 &= 0 \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

をみたすことがわかる．この式を解いて， $\boxed{\log_a b = 3 \pm 2\sqrt{2}}$
 また， $\textcircled{1}$ より， $a = b$ は不適であるから，

$$\log_a b \neq \log_b a \cdots \textcircled{3}$$

さらに， $\textcircled{1}$ の両辺を $\log b$ で割れば， $\log_b a$ も $\log_a b$ と同様の関係式

$$\therefore (\log_b a)^2 - 6\log_b a + 1 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

をみたすので， $\textcircled{2}$ ， $\textcircled{3}$ ， $\textcircled{4}$ より $\log_a b$ ， $\log_b a$ は2次方程式

$$t^2 - 6t + 1 = 0$$

の異なる2つの実数解であることがわかる．したがって求める答えは $\boxed{x^2 - 6x + 1 = 0}$

2

問題文の条件からもわかるように，タワー T の階数を k として

$$T(k-2) = 2 \text{ または } T(k) = 2 \quad \cdots (*)$$

が成り立つことは以下既知とする．

(1) $\sum_{l=1}^k T(l)$ はタワー T の全ての階数の積み木の本数であり，それは最初にある積み木の本数に等しい．したがって，

$$\sum_{l=1}^k T(l) = \boxed{3n}$$

(2) $n = 3$ のとき， k の値を小さくするには $T(l) = 2$ となる階がなるべく多くなるよう積み木を積んでいけばよく，

$$T(1) = T(2) = 2, T(3) = 3, T(4) = 2$$

のときで $k = 4$ ．

また， k の値を大きくするには $T(l) = 1$ となる階がなるべく多くなるよう積み木を積んでいけばよく， $(*)$ を考慮して，

$$T(1) = T(2) = T(3) = T(4) = 1, T(5) = 3, T(6) = 2$$

または，

$$T(1) = T(2) = T(3) = 1, T(4) = 2, T(5) = 3, T(6) = 1$$

のときで $k = 6$ ．最後に， $k = 5$ は

$$T(1) = 2, T(2) = 1, T(3) = 2, T(4) = 3, T(5) = 1$$

などで実現可能なことから k のとり得る値の範囲は $\boxed{4 \leq k \leq 6}$

一般の n に対して k の最大値を考えると， $n = 3$ のとき同様 $T(l) = 1$ となる階がなるべく多くなるよう積み木を積み，さらに $(*)$ を考慮して， $T(M-2)$ ， $T(M)$ の一方のみが2となる場合を考え

$$T(l) = 1 \ (1 \leq l \leq M-2), T(M-1) = 3, T(M) = 2$$

または，

$$T(l) = 1 \ (1 \leq l \leq M-3, l = M), T(M-2) = 2, T(M-1) = 3$$

である．積み木の本数は $3n$ であるから，

$$(M-2) + 2 + 3 = 3n \quad \therefore \boxed{M = 3n - 3}$$

(3) (i)(ii) タワー T の階数を k とすると，各階の積み木の本数は1本．または2本であり，さらに $T(k-1) = 3$ であるから，全体の積み木の本数 $3n = 9$ のうち $T(k-1) = 3$ 以外の6本を各階どのように振り分けるかを考えればよい．

$k = 5$ のときは $T(1)$ から順に

$$1, 1, 2, 3, 2$$

$$1, 2, 1, 3, 2$$

$$2, 1, 1, 3, 2$$

$$1, 2, 2, 3, 1$$

$$2, 1, 2, 3, 1$$

の $\boxed{5 \text{通り}}$ ．さらに，一般のときは，

$$\overbrace{\bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc}^{1 \text{ または } 2}, 1, 3, 2$$

$$\overbrace{\bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc}^{1 \text{ または } 2}, 2, 3, 1$$

$$\overbrace{\bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc}^{1 \text{ または } 2}, 2, 3, 2$$

のいずれかであることがわかるので，自然数 n を1または2の和 (ただし，順番が異なるものは異なるものとみなす) で表すときの場合の数を a_n とすると，

$$J(n) = a_{3n-6} + a_{3n-6} + a_{3n-7} \cdots (\spadesuit)$$

一方で，数列 a_n は漸化式，

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+2} \cdots (\clubsuit)$$

をみたすので，これが問題文の $F(l)$ と一致することがわかる．したがって， $(\spadesuit)$ ， $(\clubsuit)$ から

$$\begin{aligned} J(n) &= a_{3n-6} + a_{3n-6} + a_{3n-7} \\ &= a_{3n-6} + a_{3n-5} \quad (\because (\clubsuit)) \\ &= a_{3n-4} \quad (\because (\clubsuit)) \\ &= F(3n-4) \end{aligned}$$

とわかり， $\boxed{J(n) = F(3n-4)}$ ．数列 $F(l)$ は，はじめから順に
 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, $\cdots$

となるので，
 $J(3) = F(5) = \boxed{8}$ ， $J(4) = F(8) = \boxed{34}$ ， $J(5) = F(11) = \boxed{144}$
 である．

3

(1) 極形式に直し，ド・モアブルの定理を利用して，

$$\begin{aligned} (1+i)^7 &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^7 \\ &= 2^{\frac{7}{2}} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) \\ &= \boxed{8(1-i)} \end{aligned}$$

(2) 2項定理より

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + i)^7 &= \sum_{k=0}^7 {}_7C_k (\sqrt{x})^k i^{7-k} \\ \text{これより，虚部は } k &= 0, 2, 4, 6 \text{ のときであるから} \\ {}_7C_0 i^7 + {}_7C_2 i^5 \cdot x &+ {}_7C_4 i^3 \cdot x^2 + {}_7C_6 i \cdot x^3 \\ &= -i + 21xi - 35x^2i + 7x^3i \\ &= (7x^3 - 35x^2 + 21x - 1)i \end{aligned}$$

と求まる．したがって降べきの順で $\boxed{7x^3 - 35x^2 + 21x - 1}$

(3) ド・モアブルの定理より，
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^7 = \cos 7\theta + i \sin 7\theta$

$$\begin{aligned} \text{したがって，実数になるのは一般角で} \\ 7\theta &= n\pi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \\ \therefore \theta &= \frac{n}{7}\pi \ (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \end{aligned}$$

となるとき．このうち， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲にあるのは小さいほうから順に $\boxed{\frac{1}{7}\pi, \frac{2}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi}$

(4) (3) の結果より， $\theta = \frac{1}{7}\pi, \frac{2}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi$ のとき， $\sin \theta \neq 0$ であることに注意して，(z の虚部を $\text{Im}(z)$ で表すことにすると)

$$\begin{aligned} \text{Im} \left((\cos \theta + i \sin \theta)^7 \right) &= 0 \\ \therefore \text{Im} \left(\sin^7 \theta \left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right)^7 \right) &= 0 \\ \therefore \text{Im} \left(\left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right)^7 \right) &= 0 \end{aligned}$$

よって、(2) のはじめの式と見比べて、 $\sqrt{x} = \frac{1}{\tan \theta}$ とすれば、
このとき $(\sqrt{x} + i)^7 = 0$ の虚部が 0 になることがわかる．虚部が 0 ということは (2) で得られた 3 次の多項式の値が 0 ということなので、すなわち $\sqrt{x} = \frac{1}{\tan \theta}$ が x の 3 次方程式 $7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$ の解であることがわかる．
以上から

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\tan \theta} \quad \therefore x = \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

および、

$$\theta = \frac{1}{7}\pi, \frac{2}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi$$

であったから、 $7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$ の 3 解は、

$$x = \frac{1}{\tan^2 \frac{1}{7}\pi}, \frac{1}{\tan^2 \frac{2}{7}\pi}, \frac{1}{\tan^2 \frac{3}{7}\pi}$$

とわかったので、因数分解は問題文中の a 、 b 、 c を用いて

$$\begin{aligned} &7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 \\ &= 7 \left(x - \frac{1}{\tan^2 \frac{1}{7}\pi} \right) \left(x - \frac{1}{\tan^2 \frac{2}{7}\pi} \right) \left(x - \frac{1}{\tan^2 \frac{3}{7}\pi} \right) \\ &= \boxed{7 \left(x - \frac{1}{a^2} \right) \left(x - \frac{1}{b^2} \right) \left(x - \frac{1}{c^2} \right)} \end{aligned}$$

とできる．

(5) (2) から (4) の流れを一般化する．まず、2 項定理より

$$(\sqrt{x} + i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} {}_{2n+1}C_k (\sqrt{x})^k \cdot i^{(2n+1)-k}$$

したがって、虚部は $k = 0, 2, \dots, 2n-2, 2n$ のときで確かに n 次の多項式となる．特に n 次、 $n-1$ 次の係数は $k = 2n$ 、 $k = 2n-2$ のときを考えて、

$${}_{2n+1}C_{2n} \cdot x^n \cdot i = (2n+1) \cdot x^n \cdot i$$

$${}_{2n+1}C_{2n-2} \cdot x^{n-1} \cdot i^3 = -\frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}{6} \cdot x^{n-1} \cdot i$$

であるから、 x^n 、 x^{n-1} の係数は順にそれぞれ、

$$\boxed{2n+1}, \quad \boxed{-\frac{(2n+1) \cdot n \cdot (2n-1)}{3}}$$

また、虚部が 0 になるときを考えれば、この n 次方程式の解は

$$x = \frac{1}{\tan^2 \frac{1}{2n+1}\pi}, \frac{1}{\tan^2 \frac{2}{2n+1}\pi}, \dots, \frac{1}{\tan^2 \frac{n}{2n+1}\pi}$$

の n 個である．したがって、

$$\begin{aligned} &(2n+1) \cdot x^n - \frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}{6} \cdot x^{n-1} + \dots \\ &= (2n+1) \left(x - \frac{1}{\tan^2 \frac{1}{2n+1}\pi} \right) \left(x - \frac{1}{\tan^2 \frac{2}{2n+1}\pi} \right) \\ &\quad \dots \left(x - \frac{1}{\tan^2 \frac{n}{2n+1}\pi} \right) \end{aligned}$$

と因数分解できるので、 x^{n-1} の係数を比較して、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tan^2 \frac{1}{2n+1}\pi} + \frac{1}{\tan^2 \frac{2}{2n+1}\pi} + \dots + \frac{1}{\tan^2 \frac{n}{2n+1}\pi} \\ &= \frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}{6} = \boxed{\frac{n(2n-1)}{3}} \end{aligned}$$

(6) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、問題文より

$$\frac{1}{\tan^2 \theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

であるから、 $\theta = \frac{k}{2n+1}\pi$ として、

$$\frac{1}{\tan^2 \frac{k}{2n+1}\pi} < \frac{1}{\left(\frac{k}{2n+1}\pi \right)^2} < \frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2n+1}\pi}$$

が成り立つ． $k = 1, 2, 3, \dots, n$ で和をとれば、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \frac{k}{2n+1}\pi} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{2n+1}\pi \right)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2n+1}\pi}$$

さらに、 $1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ を利用すれば、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \frac{k}{2n+1}\pi} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{2n+1}\pi \right)^2} < \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{k}{2n+1}\pi} \right)$$

最後に (5) の結果を用いて

$$\begin{aligned} &\frac{n(2n-1)}{3} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{2n+1}\pi \right)^2} < n + \frac{n(2n-1)}{3} \\ &\therefore \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \pi^2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \pi^2 \end{aligned}$$

したがって、不等式の最左辺、最右辺はともに $n \rightarrow \infty$ で $\frac{\pi^2}{6}$ に収束するから、はさみうちの原理より、中辺も収束し、求める極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

[講評]

1

言われてみれば教科書レベルの内容だが、(3) を筆頭に一筋縄ではいかない問題もある．しかし、後の設問のことを考えると完答が望ましい．

2

最後の設問の一般化の部分にもあるように、要は 1 と 2 の並べ方を考えるだけの問題．だが、それに気づくのは試験時間を考慮すると難しかったかもしれない．なお、タワーなどという言葉を用いてはいるが、数列 $J(n)$ と書くあたり、出題者は明らかに「ジェンガ」を意識してこの問題を作ったことだろう．

3

複素数では良くある話題．というのも 2016 年の横浜市立大医学部、さらに古くは 1990 年の東工大で出題がある．穴埋めだから何とかなるものの、それでも受験生にとっては誘導もテクニカルで難しかったであろう．なお、(6) の結果は「バーゼル問題」と呼ばれ、一部の数学好きの人にとっては有名な結果である．知っていて得をした受験生も中にはいるかもしれない．

昨年に比べ、質、量の両方で難化した．合格ラインは 55 % 前後といったところであろうか．

各大学医学部の入試傾向に完全対応！

直前講習会



1/29 (月)	聖マリ最終	2/9(金)～10(土)	埼玉 (後)
2/2 (金)	慈恵最終	2/12 (月)	金沢 (後)
2/6(火)～7(水)	日大	2/15(木)～21(水)	昭和Ⅱ①②

各大学の二次試験の要点解説と面接対策

二次試験対策



過去の受験生からの貴重な情報をもとに、各大学の二次試験の要点解説、本番に即した面接演習を行います。

高い合格実績を誇るYMSがあなたを合格へと導きます。