1

(1) 配点がそれぞれ10点，20点，30点，40点の4つの問題があり，合計点が60点以上のとき合格とする。ある合格者が10点の問題を間違えた確率は $\boxed{ア}$ である。

ただし，各問を正解する確率は $\frac{1}{3}$ とする。

(2) n 個のデータ x_1，x_2，$\cdots$，x_n に対して，平均値を m，標準偏差を s とする。このとき，$2x_1+8$，$2x_2+8$，$\cdots$，$2x_n+8$ の平均値は $\boxed{イ}$ であり，標準偏差は $\boxed{ウ}$ である。

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\boxed{エ}$

(4) 三角形ABCにおいて AB$=2$，AC$=3$，$60°\leqq A\leqq 135°$ とする。このとき BC^2 のとり得る値の範囲は $\boxed{オ}\leqq \text{BC}^2\leqq\boxed{カ}$ であり，三角形の面積が $\frac{12}{5}$ のとき

BC$=\boxed{キ}$ である。

解答 (1) $\boxed{ア}$：$\frac{10}{17}$ (2) $\boxed{イ}$：$2m+8$，$\boxed{ウ}$：$2s$ (3) $\boxed{エ}$：2

(4) $\boxed{オ}$：7，$\boxed{カ}$：$13+6\sqrt{2}$，$\boxed{キ}$：$\frac{\sqrt{505}}{5}$

(1) 60点以上となる場合を考える。正解が1通り，不正解が2通りであると考えて

10点	20点	30点	40点	場合の数
○	○	○	○	1
×	○	○	○	2
×	×	○	○	4
○	×	○	○	2
○	○	×	○	2
×	○	×	○	4
○	○	○	×	2

したがって，合格する場合の数の総数は17通り。そのうち，10点の問題を間違えるのは10通りであるから，求める確率は $^{ア}\boxed{\frac{10}{17}}$

(2) 平均は

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2x_k+8)=2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{n}\cdot 8n={}^{イ}\boxed{2m+8}$$

また，偏差は

$$2x_k+8-(2m+8)=2(x_k-m)$$

となるから，分散は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}4(x_k-m)^2=4\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2=4s^2$$

したがって，標準偏差は $^{ウ}\boxed{2s}$

(3) $\sqrt{x}=t$ と置換すると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}(2tdt)=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\,dt=2\Big[-\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}={}^{エ}\boxed{2}$$

(4) 余弦定理より

$$\text{BC}^2=4+9-2\cdot2\cdot3\cos A=13-12\cos A$$

$60°\leqq A\leqq 135°$ のとき

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\cos A\leqq\frac{1}{2}\quad\cdots①$$

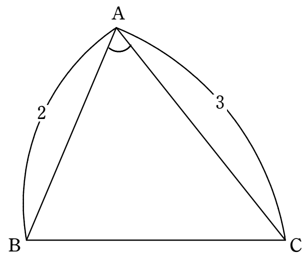
であることから

$$-6\leqq-12\cos A\leqq 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 7\leqq 13-12\cos A\leqq 13+6\sqrt{2}$$

したがって

$$^{オ}\boxed{7}\leqq\text{BC}^2\leqq{}^{カ}\boxed{13+6\sqrt{2}}$$



また，面積の条件より

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin A=\frac{12}{5}\qquad\therefore\ \sin A=\frac{4}{5}$$

このとき

$$\cos A=\frac{3}{5}\ \text{または}\ -\frac{3}{5}$$

①をみたすのは

$$\cos A=-\frac{3}{5}$$

のときで

$$\text{BC}^2=13-12\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{101}{5}\qquad\therefore\ \text{BC}={}^{キ}\boxed{\frac{\sqrt{505}}{5}}$$

2

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2017$，$a_2=20172017$，$a_3=201720172017$，$\cdots$，とする。つまり a_n は $4n$ 桁の自然数で各桁の数字は2，0，1，7が n 回繰り返している。

(1) 99は11の倍数だから自然数 a について $100a$ と a を11で割った余りは等しい。したがって1234を11で割った余りは12と34を11で割った余りの和から求まる。同様に考えると a_7 を11で割った余りは $\boxed{ア}$ である。

(2) 9999は101の倍数だから a_{10} を101で割った余りは $\boxed{イ}$ であり，a_n が101の倍数となる最小の n は $n=\boxed{ウ}$ である。

(3) 素因数分解すると $999=\boxed{エ}$ である。a_4 を37で割った余りは $\boxed{オ}$ であり，a_n を37で割った余りを r_n とすると $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}r_n=\boxed{カ}$ である。

(4) a_n が77の倍数となる最小の n は $n=\boxed{キ}$ である。

解答 (1) $\boxed{ア}$：6 (2) $\boxed{イ}$：71，$\boxed{ウ}$：101

(3) $\boxed{エ}$：$3^3\times37$，$\boxed{オ}$：19，$\boxed{カ}$：1438 (4) $\boxed{キ}$：33

$r=10^4$ とおくとき，

$$a_n=2017(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})$$

とかける。

(1) mod 11で考える。

$$2017\equiv4,\quad r=10^4=10^2\times10^2\equiv1\times1=1$$

より，$n=7$ とすると

$$a_7\equiv4(1+1+1+1+1+1+1)=28\equiv6$$

したがって

a_7 を11で割った余りは $^{ア}\boxed{6}$

(2) mod 101で考える。

$$2017\equiv98,\quad r=10^4\equiv1$$

より

$$a_{10}\equiv98(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1)=980\equiv71$$

したがって

a_{10} を101で割った余りは $^{イ}\boxed{71}$

次に，a_n が101の倍数となるのは

$$a_n\equiv98n$$

が101の倍数となるときである。98と101が互いに素であることより，

求める最小の n は $n={}^{ウ}\boxed{101}$

(3) $999={}^{エ}\boxed{3^3\times37}$

mod 37で考える。

$$2017\equiv19,\quad r=10^4\equiv1\times10\equiv10$$

より

$$a_4\equiv19(1+10+100+1)\equiv19\times(1+10+26+1)\equiv19(37+1)\equiv19$$

したがって

a_4 を 37 で割った余りは ${}^{オ}\boxed{19}$

次に，a_n を 37 で割った余りは

19，24，0

を繰り返す。実際，

$$a_{n+3}-a_n\equiv r^n\times 19\times(1+10+26)\equiv 0$$

であることから周期 3 で繰り返すことがわかる。

したがって

$$\sum_{n=1}^{100} r_n=33(19+24+0)+19={}^{カ}\boxed{1438}$$

(4) a_n が 7 の倍数となるときを考える。

mod 7 で考える。

$$a_n\equiv 1(1+4+2+1+4+2+\cdots)$$

より，a_n が 7 の倍数になるのは n が 3 の倍数であるときである。

また (1) より mod 11 において

$$a_n\equiv 4(1+1+1+1+\cdots)$$

より，a_n が 11 の倍数になるのは n が 11 の倍数であるときである。

3 と 11 が互いに素であることに注意して，a_n が 77 の倍数になる最小の n は

$$n={}^{キ}\boxed{33}$$

3

m を正の実数とし，方程式 $\sqrt{x^2+x}-mx^2-x=0$ の異なる実数解の個数を k とする。

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{x^2}$ とおく。

(1) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\boxed{ア}$。$\lim_{x\to+0}f(x)=\boxed{イ}$。

(2) $f(x)$ の定義域は $\boxed{ウ}$ である。

(3) $f'(x)=\dfrac{\boxed{エ}+\boxed{オ}\sqrt{x^2+x}}{2x^2\sqrt{x^2+x}}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{カ}$ で極大値 $\boxed{キ}$ をとる。ただし，$\boxed{エ}$ と $\boxed{オ}$ には定数，または x の多項式が入る。

(4) $k=2$ のとき，m のとり得る値の範囲は，$\boxed{ク}<m<\boxed{ケ}$ または $m=\boxed{コ}$ である。また $m=\dfrac{10}{9}$ のとき $k=\boxed{サ}$ となる。

解答 (1) $\boxed{ア}$: 0，$\boxed{イ}$: ∞　(2) $\boxed{ウ}$: $x\leqq -1,\ 0<x$

(3) $\boxed{エ}$: $-2x-3$，$\boxed{オ}$: 2，$\boxed{カ}$: $-\dfrac{9}{8}$，$\boxed{キ}$: $\dfrac{32}{27}$

(4) $\boxed{ク}$: 解なし，$\boxed{ケ}$: 解なし，$\boxed{コ}$: 解なし，$\boxed{コ}$: 4

注　出題者が想定していた解答は恐らく

$\boxed{ク}$: 0，$\boxed{ケ}$: 1，$\boxed{コ}$: $\dfrac{32}{27}$，$\boxed{サ}$: 3

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{x^2}$ に対し

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}+t}{t^2}\quad(x=-t\text{ とおいた})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1\right)$$

$$={}^{ア}\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x(\sqrt{x^2+x}+x)}={}^{イ}\boxed{\infty}$$

(2) $f(x)$ の定義域は

$x\fallingdotseq 0$　かつ　$x^2+x\geqq 0$

を満たす範囲であるから

$x\fallingdotseq 0$　かつ　$x(x+1)\geqq 0$　　$\therefore\ {}^{ウ}\boxed{x\leqq -1,\ 0<x}$

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}$ として

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot x^2-\sqrt{x^2+x}\cdot 2x}{x^4}+\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{(2x+1)x^2-2\sqrt{x^2+x}\cdot\sqrt{x^2+x}\cdot 2x}{2x^4\sqrt{x^2+x}}+\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{(2x+1)x-4(x^2+x)}{2x^3\sqrt{x^2+x}}+\frac{1}{x^2}$$

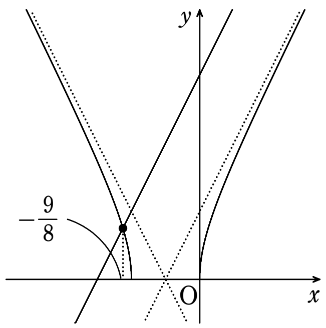
$$=\frac{-2x-3}{2x^2\sqrt{x^2+x}}+\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{{}^{エ}\boxed{-2x-3}+{}^{オ}\boxed{2}\sqrt{x^2+x}}{2x^2\sqrt{x^2+x}}$$

であり，分母は正であるから，分子の

$$2\sqrt{x^2+x}-(2x+3)$$

の符号を調べればよい。$y=\sqrt{x^2+x}$ と $y=2x+3$ のグラフの上下を調べると右図のようになる。この 2 曲線の交点の x 座標は



$$2\sqrt{x^2+x}=2x+3$$

$$4(x^2+x)=4x^2+12x+9\qquad\therefore\ x=-\frac{9}{8}$$

であるから，$x=-\dfrac{9}{8}$ の前後で $f'(x)$ の符号は正から負へと変化し，増減表は以下。

x	$\cdots$	$-\frac{9}{8}$	$\cdots$	-1	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$			$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$			$\searrow$

したがって，$x={}^{カ}\boxed{-\dfrac{9}{8}}$ で極大値

$$f\left(-\frac{9}{8}\right)=\frac{\sqrt{\left(-\frac{9}{8}\right)^2-\frac{9}{8}}-\left(-\frac{9}{8}\right)}{\left(-\frac{9}{8}\right)^2}={}^{キ}\boxed{\frac{32}{27}}$$

をとる。

(4)　$\sqrt{x^2+x}-mx^2-x=0$

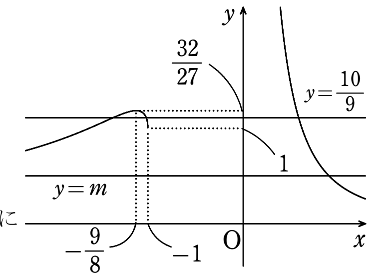
は $x=0$ が解であることに注意する。$x\fallingdotseq 0$ をみたすものに関しては定数分離して

$$m=\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x^2}=f(x)$$

よって，問題の方程式の個数 k は $y=m$ と $y=f(x)$ の共有点の個数に 1 個 ($x=0$ は常に解) 加えたものとわかる。(1)(3) の考察および

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

から，$y=f(x)$ のグラフは右図のよう。



$k=2$ となるのは，共有点が 1 つのときで

$$\frac{32}{27}<k$$

また $m=\dfrac{10}{9}$ のとき $1<\dfrac{10}{9}<\dfrac{32}{27}$ であることに注意して，共有点は 3 つ存在するから

$$k=3+1={}^{サ}\boxed{4}$$

となる。

注　$\boxed{ク}$，$\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$ で出題者の想定していた解答は，グラフの共有点が 2 個となるとき (実際には $k=3$) であり，おそらく ${}^{ク}\boxed{0}<m<{}^{ケ}\boxed{1}$ または

$$m={}^{コ}\boxed{\frac{32}{27}}$$ であろう。

【講評】

1　いずれも決して難しくない小問集合である。ミスなく全問完答したい。

2　全体を通して最も解きづらい問題。合同式の使い方に慣れていると解きやすい。この問題でどれだけ正解できたかが勝負の分かれ目になるだろう。

3　誘導にしたがってグラフを描き実数解の個数を求める問題であるが，(4)で $x=0$ の場合を考えると，ケとコの設問が埋まらない。出題ミスだと思われる。

全体として 1 日目よりは解きやすい。 7 割以上を目標にしたい。