【1】（1）　$a=\frac{5}{8}$，$b=\frac{5}{2}$　（2）　$a=3$，$b=-14$

（3）　$\mathrm{PQ}=\sqrt{13}$，$\mathrm{RP}=3\sqrt{2}$，面積 $\frac{3\sqrt{17}}{2}$　（4）　順に $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{36}$

【2】（1）　$1-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$　（2）　$\log_2(2+\sqrt{5})$　（3）　順に $4:5$，$k=\frac{7}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}$

（4）　$b_n=2+\left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$

【3】（1）　$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$，面積 $\frac{7\sqrt{2}}{4}$　（2）　$y=2x-2\sqrt{2}$，接点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}\right)$

（3）　$\frac{7\sqrt{2}+4+5\pi}{4}$

【4】（1）　$y=4x^2$ より $y'=8x$ で $\mathrm{P}(a,\ 4a^2)$ における接線 l_p は

$$y=8a(x-a)+4a^2$$

$$y=8ax-4a^2$$

l_q は a を b に置きかえて

$$y=8bx-4b^2$$

である．2 式より y を消去して

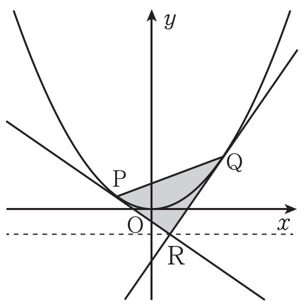
$$8ax-4a^2=8bx-4b^2$$

$$8(a-b)x=4(a+b)(a-b)\quad\therefore\quad x=\frac{a+b}{2}$$

このとき $y=8a\cdot\frac{a+b}{2}-4a^2=4ab$ で $\mathrm{R}\left(\frac{a+b}{2},\ 4ab\right)$ である．l_p，l_q は直交するから

$$8a\cdot 8b=-1\quad\therefore\quad 4ab=-\frac{1}{16}\cdots\cdots①$$

である．したがって R の y 座標は常に $-\frac{1}{16}$ である．



（2）　$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\frac{a-b}{2},\ 4a(a-b)\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(\frac{b-a}{2},\ 4b(b-a)\right)$ であるから

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left|\frac{a-b}{2}\cdot 4b(b-a)-\frac{b-a}{2}\cdot 4a(a-b)\right|$$

$$=\boldsymbol{(b-a)^3}$$

（3）　① より $a=-\frac{1}{64b}$ である．① および $a<b$ であるから $b>0$ とわかり，相加相乗平均の不等式から

$$b-a=b+\frac{1}{64b}\geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{64b}}=\frac{1}{4}$$

で等号は $b=\frac{1}{8}$，$a=-\frac{1}{8}$ のとき成り立つ．したがって △PQR の最小値は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{64}}$$

【5】（1）　H は △ABC 上にあるから実数 k，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=(1,\ 0,\ 0)+k(-1,\ 2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 4)$$

$$=(1-k-t,\ 2k,\ 4t)$$

と書ける．$\mathrm{OH}\perp\mathrm{AB}$，$\mathrm{OH}\perp\mathrm{AC}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-k-t,\ 2k,\ 4t)\cdot(-1,\ 2,\ 0)$$

$$=(-1+k+t)+4k=0\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-k-t,\ 2k,\ 4t)\cdot(-1,\ 0,\ 4)$$

$$=(-1+k+t)+16t=0\cdots\cdots②$$

①－② より

$$4k-16t=0\quad\therefore\quad k=4t$$

① に代入して

$$-1+4t+t+4\cdot 4t=0\quad\therefore\quad t=\frac{1}{21}$$

このとき $k=\frac{4}{21}$ となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(1-\frac{4}{21}-\frac{1}{21},\ \frac{8}{21},\ \frac{4}{21}\right)=\left(\frac{16}{21},\ \frac{8}{21},\ \frac{4}{21}\right)$$

であり $\mathrm{H}\left(\boldsymbol{\frac{16}{21},\ \frac{8}{21},\ \frac{4}{21}}\right)$

（2）　$z=a$ と T の交線を A′B′ とすると，線分 A′B′ を z 軸の周りに 1 回転させたときの通過領域の面積が $S(a)$ である．

$\triangle \mathrm{CA'B'} \backsim \triangle \mathrm{CAB}$ で相似比は $4-a:4$ だから $S(a)$ は線分 AB を原点 O を中心として 1 回転させた面積 $U(a)$ を $\dfrac{(4-a)^2}{4^2}$ 倍したものである．O から線分 AB に下ろした垂線の長さを h とすると $\triangle \mathrm{OAB}$ の面積より

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot h$$

$$h = \frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}$$

$$h = \frac{1\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2}} \quad \therefore \quad h = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{OB} \geqq \mathrm{OA}$ だから

$$U(a) = \pi\left(\mathrm{OB}^2 - h^2\right)$$

$$= \pi\left\{2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right\} = \frac{16}{5}\pi$$

したがって

$$S(a) = U(a)\cdot\frac{(4-a)^2}{4^2} = \boldsymbol{\frac{(4-a)^2\pi}{5}}$$

（３） $$\int_1^3 \frac{S'(z)}{S(z)}\,dz = \Big[\log S(z)\Big]_1^3$$

$$= \log S(3) - \log S(1) = \log\frac{S(3)}{S(1)}$$

$$= \log\frac{1^2}{3^2} = \boldsymbol{-2\log 3}$$

【講評】

昨年に比べ難易度はかなり下がり， どの問題も基本的である．また記述式も数 III 色が薄れ， 計算も容易い．これなら数学が得意な生徒なら満点も十分に狙えただろう．差がついたとしたら大問 3 か．合格には 60 ～65 %はとりたいところである．なお大問 5 は空間だが今年の医学部入試ではかなり出題されている．今後も要注意である．