YMS 2018年度 解答速報 慶應義塾大学医学部 数学

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

(1)　$a>1$ に対し，集合 $A(a)$ を

$$A(a)=\left\{x \mid x \text{は実数かつ} \log_a(x+2a)-\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{x}{4}\right)<2\right\}$$

により定義するとき，$A(a)\subset(-\infty,\ 4)$ となるような a の範囲を不等式で表すと，$\boxed{\text{(あ)}}$ である．

(2)　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ はどれも大きさが 1 で，$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}$ を満たしている．このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{(い)}}$ であり，$|\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|$ は $t=\boxed{\text{(う)}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{(え)}}$ をとる．

(3)　k を自然数とする．赤い玉と白い玉がそれぞれ $2k$ 個ずつある．これらをすべて円周上に等間隔に並べる並べ方の総数を N_k とおくと，

$$N_1=\boxed{\text{(お)}},\quad N_2=\boxed{\text{(か)}},\quad N_3=\boxed{\text{(き)}}$$

である．ただし，回転して並びが同じになるものは同じ並べ方と考える．

(1)　真数条件は，$x>-2a$ かつ $x>0 \iff x>0$　…①

このとき，

$$\log_a(x+2a)-\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{x}{4}\right)<2 \iff \log_a(x+2a)-\frac{\log_a\left(\frac{x}{4}\right)}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)}<2$$

$$\iff \log_a\frac{x(x+2a)}{4}<\log_a a^2$$

底 a は 1 より大きいから，

$$\frac{x(x+2a)}{4}<a^2 \iff x^2+2ax-4a^2<0$$

$$\iff -(\sqrt{5}+1)a<x<(\sqrt{5}-1)a \quad \cdots②$$

①，② より，

$$0<x<(\sqrt{5}-1)a$$

この範囲が，$x<4$ に含まれるための条件は，

$$(\sqrt{5}-1)a\leqq 4 \iff a\leqq\sqrt{5}+1$$

$a>1$ より，

$$1<a\leqq\sqrt{5}+1 \quad \cdots\text{(あ)}$$

(2)　$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}$ より，

$$2\vec{a}+3\vec{b}=-4\vec{c},\quad 3\vec{b}+4\vec{c}=-2\vec{a},\quad 2\vec{a}+4\vec{c}=-3\vec{b}$$

それぞれの等式の両辺の大きさの 2 乗を考える．$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ にも注意して，

$$4+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9=16,\quad 9+24\vec{b}\cdot\vec{c}+16=4,\quad 4+16\vec{c}\cdot\vec{a}+16=9$$

したがって，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\quad\cdots\text{(い)},\qquad \vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{7}{8},\qquad \vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{11}{16}$$

このとき，

$$|\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2+2t(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2=\frac{5}{2}-\frac{25}{8}t+t^2$$

$$=\left(t-\frac{25}{16}\right)^2+\frac{15}{256}$$

$|\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|$ は $t=\dfrac{25}{16}$ のとき，最小値 $\sqrt{\dfrac{15}{256}}=\dfrac{\sqrt{15}}{16}$ をとる．　…(う)，(え)

(3)　◆ N_1 について，

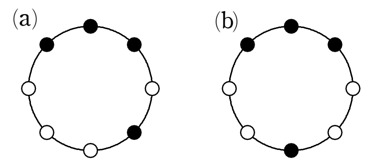
同色の玉を隣り合うように置くか，向かい合うように置くかの 2 通りであるから，

$$N_1=2 \quad\cdots\text{(お)}$$

◆ N_2 について，

4 個の赤玉をいくつかの組に分け，円周上に並んだ 4 個の白玉の間に入れると考える．各白玉の間に置かれた赤玉の個数によって，並べた状態を表現する．

例えば，右図の (a)，(b) はそれぞれ (3, 1, 0, 0)，(3, 0, 1, 0) と表す．
ただし，円周上に並べるので，(3, 1, 0, 0) と (1, 0, 0, 3) は同じ並べ方である．



$k=2$ の場合の並べ方は，

(4, 0, 0, 0)，(3, 1, 0, 0)，(3, 0, 1, 0)，(3, 0, 0, 1)，(2, 2, 0, 0)，(2, 0, 2, 0)，(2, 1, 1, 0)，(2, 1, 0, 1)，(2, 0, 1, 1)，(1, 1, 1, 1)

の 10 通りであるから，

$$N_2=10 \quad\cdots\text{(か)}$$

◆ N_3 について，

まず，赤玉の分け方を分類すると，

{6}，{5, 1}，{4, 2}，{3, 3}，{4, 1, 1}，{3, 2, 1}，{2, 2, 2}，
{3, 1, 1, 1}，{2, 2, 1, 1}，{2, 1, 1, 1, 1}，{1, 1, 1, 1, 1, 1}

(ⅰ)　{6} のとき，
(6, 0, 0, 0, 0, 0) の 1 通り．

(ⅱ)　{1, 1, 1, 1, 1, 1} のとき，
(1, 1, 1, 1, 1, 1) の 1 通り．

(ⅲ)　{5, 1} のとき，
$(5,\ x,\ x,\ x,\ x,\ x)$ の x の 1 ヵ所に 1，残りには 0 を入れるから 5 通り．

(ⅳ)　{4, 2} のとき，
(ⅲ) と同様に，5 通り．

(ⅴ)　{3, 3} のとき，
(3, 3, 0, 0, 0, 0)，(3, 0, 3, 0, 0, 0)，(3, 0, 0, 3, 0, 0) の 3 通り．

(ⅵ)　{4, 1, 1} のとき，
$(4,\ x,\ x,\ x,\ x,\ x)$ の x の 2 ヵ所に 1，残りには 0 を入れるから ${}_5\mathrm{C}_2=10$ (通り)．

(ⅶ)　{3, 2, 1} のとき，
$(3,\ x,\ x,\ x,\ x,\ x)$ の x の 1 ヵ所に 2，他の 1 ヵ所に 1，残りには 0 を入れるから，
$5\cdot 4=20$ (通り)．

(ⅷ)　{2, 2, 2} のとき，
(2, 2, 2, 0, 0, 0)，(2, 2, 0, 2, 0, 0)，(2, 2, 0, 0, 2, 0)，(2, 0, 2, 0, 2, 0) の 4 通り．

(ⅸ)　{3, 1, 1, 1} のとき，
$(3,\ x,\ x,\ x,\ x,\ x)$ の x の 3 ヵ所に 1，残りには 0 を入れるから ${}_5\mathrm{C}_3=10$ (通り)．

(ⅹ)　{2, 1, 1, 1, 1} のとき，
$(2,\ x,\ x,\ x,\ x,\ x)$ の x の 4 ヵ所に 1，残りには 0 を入れるから ${}_5\mathrm{C}_4=5$ (通り)．

(xi)　{2, 2, 1, 1} のとき，
$(2,\ x,\ x,\ x,\ x,\ x)$ の x の位置に 2，1，1，0，0 を並べ替えて入れるから，

$$\frac{5!}{2!2!}=30\ (\text{通り}).$$

このうち，(2, 1, 0, 2, 1, 0)，(2, 0, 1, 2, 0, 1) 以外については，2 通りずつ重複ができる．
例えば，(2, 2, 1, 1, 0, 0) と (2, 1, 1, 0, 0, 2) は同じ並べ方である．
したがって，重複を除いた並べ方は $\dfrac{30-2}{2}+2=16$ (通り)．

以上により，

$$N_3=1+1+5+5+3+10+20+4+10+5+16=80 \quad\cdots\text{(き)}$$

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

k を2以上の自然数とする．2つの袋A，Bがあり，袋Aには番号1から k までが書かれたカードが1枚ずつ(計 k 枚)入っていて，袋Bには番号0から2までが書かれたカードが1枚ずつ(計3枚)入っているとする．この状態から始めて，以下の操作Tを繰り返し行う．

操作T
- (T1) それぞれの袋の中から無作為にカードを1枚ずつ取り出す．
- (T2) (i) 取り出した2枚のカードの番号が同じ場合は，取り出したカードを2枚とも袋Aに入れる．
  (ii) 取り出した2枚のカードの番号が異なる場合は，取り出した2枚のカードそれぞれをもとの袋に戻す．

以下，n を自然数とする．操作Tを n 回繰り返し終えたとき，袋Bの中にカードが3枚入っている確率を $a_n(k)$，ちょうど2枚入っている確率を $b_n(k)$ とする．

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n(k)$，$b_n(k)$ を $a_{n-1}(k)$，$b_{n-1}(k)$ で表すと，

$$\begin{cases} a_n(k) = \boxed{\text{(あ)}}\, a_{n-1}(k) \\ b_n(k) = \boxed{\text{(い)}}\, a_{n-1}(k) + \boxed{\text{(う)}}\, b_{n-1}(k) \end{cases}$$

である．

(2) (1)より，$a_n(k)$ を k と n の式で表すと，$a_n(k) = \boxed{\text{(え)}}$ である．また，

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k(k) = \boxed{\text{(お)}}$ である．

(3) $k=3$ のとき，$b_n(3)$ を n の式で表すと，

$$b_n(3) = \boxed{\text{(か)}}\left(\boxed{\text{(き)}}\right)^n\left\{1-\left(\boxed{\text{(く)}}\right)^n\right\}$$

である．ただし，$\boxed{\text{(か)}}>0$ であり，$\boxed{\text{(か)}}$，$\boxed{\text{(き)}}$，$\boxed{\text{(く)}}$ は文字 n，k を含まないものとする．

(1) まず，1回の操作で起こる状態の変化の確率をそれぞれ求める．

① 袋Bに3枚→袋Bに2枚

とり出し方は全部で $3k$ 通り，このうち同じ番号となるのは1か2の2通りなので，

$$\frac{2}{3k}$$

② 袋Bに3枚→袋Bに3枚

①の余事象であるから，$1-\dfrac{2}{3k}=\dfrac{3k-2}{3k}$

③ 袋Bに2枚→袋Bに1枚

例えば，袋Aに1が2枚，2～k が各1枚，袋Bに0と2が各1枚の状態とすると，とり出し方は全部で $2(k+1)$ 通り，このうち同じ番号となるのは2の1通りなので，

$$\frac{1}{2(k+1)}$$

④ 袋Bに2枚→袋Bに2枚

③の余事象であるから，$1-\dfrac{1}{2(k+1)}=\dfrac{2k+1}{2k+2}$

空欄(あ)～(う)には，それぞれ②，①，④の確率が入るから，

$$\begin{cases} a_n(k) = \dfrac{3k-2}{3k}a_{n-1}(k) \\ b_n(k) = \dfrac{2}{3k}a_{n-1}(k) + \dfrac{2k+1}{2k+2}b_{n-1}(k) \end{cases} \quad \cdots\text{(あ)～(う)}$$

(2) 初めの状態を $n=0$ と考えると，

$$a_0(k)=1, \quad b_0(k)=0$$

したがって，

$$a_n(k) = a_0(k)\cdot\left(\frac{3k-2}{3k}\right)^n = \left(1-\frac{2}{3k}\right)^n \quad \cdots\text{(え)}$$

また，$a_k(k)=\left(1-\dfrac{2}{3k}\right)^k=\left\{\left(1-\dfrac{2}{3k}\right)^{-\frac{3k}{2}}\right\}^{-\frac{2}{3}}$ より，$\lim\limits_{t\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=e$ を用いて，

$$\lim_{k\to\infty} a_k(k) = e^{-\frac{2}{3}} \quad \cdots\text{(お)}$$

(3) $k=3$ のとき，(1)より，

$$b_n(3) = \frac{2}{9}a_{n-1}(3) + \frac{7}{8}b_{n-1}(3)$$

さらに，(え)より，$a_n(3)=\left(\dfrac{7}{9}\right)^n$ であるから，

$$b_n(3) = \frac{7}{8}b_{n-1}(3) + \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \iff b_n(3) = \frac{7}{8}b_{n-1}(3) + \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$$

$$\iff \left(\frac{8}{7}\right)^n b_n(3) = \left(\frac{8}{7}\right)^{n-1} b_{n-1}(3) + \frac{16}{63}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

したがって，自然数 n に対し，

$$\left(\frac{8}{7}\right)^n b_n(3) = \left(\frac{8}{7}\right)^0 b_0(3) + \sum_{k=1}^{n}\frac{16}{63}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1} = 0 + \frac{16}{63}\cdot\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n}{1-\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{16}{7}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right\}$$

$$\therefore\ b_n(3) = \frac{16}{7}\left(\frac{7}{8}\right)^n\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right\} \quad \cdots\text{(か)～(く)}$$

[III]

以下の文章の空欄の $\boxed{\text{(け)}}$ には適切な式を，それ以外には適切な数を入れて文章を完成させなさい．

(1) x を実数として，

$$f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

とおく．このとき

$$f(x) = \boxed{\text{(あ)}}\sin 2x + \boxed{\text{(い)}}\sin 4x + \boxed{\text{(う)}}\sin 6x$$

と書くことができる．p を $f(p)=0$ を満たす最小の正の数とするとき，曲線 $y=f(x)\ (0 \leqq x \leqq p)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{(え)}}$ である．

(2) x を実数として

$$g(x) = -\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x - \sin 3x \sin x$$

とおく．このとき

$$g(x) = \boxed{\text{(お)}}(\cos 2x + \cos 5x) + \boxed{\text{(か)}}\cos 3x + \boxed{\text{(き)}}\cos 4x$$

と書ける．また $g\left(\dfrac{\pi}{7}\right) = \boxed{\text{(く)}}$ である．

(3) α，β，γ を実数として，

$$A = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$
$$B = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$$
$$C = \sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha$$

とおく．C を A，B の式で表すと，$C=\boxed{\text{(け)}}$ である．

以下，$\alpha=\dfrac{\pi}{7}$，$\beta=-\dfrac{2\pi}{7}$，$\gamma=-\dfrac{3\pi}{7}$ のときを考える．i を虚数単位として，$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とおくと，$\sum\limits_{k=1}^{7} z^k = \boxed{\text{(こ)}}$ であり，このことから上記の α，β，γ の値に対して B の値を求めると，$B=\boxed{\text{(さ)}}$ である．$g\left(\dfrac{\pi}{7}\right)=C$ であることと，A の符号に注意すると，A の値は $\boxed{\text{(し)}}$ である．このことから $f\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$ の値は $\boxed{\text{(す)}}$ である．

(1)
$$f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x \quad \cdots①$$
$$=\sin 3x\sin x\cdot\sin 2x$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x)\cdot\sin 2x$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x$$
$$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\sin 6x-\sin(-2x)\}$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x \quad \cdots② \quad \cdots(あ)〜(う)$$

また①より $f(x)=0$ を満たす x のうち最小のものは
$$\sin x\sin 2x\sin 3x=0$$
を考えれば $\frac{\pi}{3}$．よって，$p=\frac{\pi}{3}$．

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ において $f(x)\geqq 0$ であることに注意すれば，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は②より，
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{6}\cos 6x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{32} \quad \cdots(え)$$

(2)
$$g(x)=-\sin x\sin 2x+\sin 2x\sin 3x-\sin 3x\sin x \quad \cdots③$$
とすると，和積の公式から
$$\sin x\sin 2x=-\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos x) \quad \cdots④$$
$$\sin 2x\sin 3x=-\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos x) \quad \cdots⑤$$
$$\sin 3x\sin x=-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x) \quad \cdots⑥$$
であるから，④，⑤，⑥を③に代入して，
$$g(x)=-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 5x)+\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 4x \quad \cdots⑦ \quad \cdots(お)〜(き)$$
と書ける．$x=\frac{\pi}{7}$ とすると，
$$\cos\frac{5}{7}\pi=\cos\left(\pi-\frac{2}{7}\pi\right)=-\cos\frac{2}{7}\pi$$
$$\cos\frac{4}{7}\pi=\cos\left(\pi-\frac{3}{7}\pi\right)=-\cos\frac{3}{7}\pi$$
であるから，⑦より
$$g\left(\frac{\pi}{7}\right)=0 \quad \cdots(く)$$

(3)
$$A=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \quad \cdots⑧$$
$$B=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma \quad \cdots⑨$$
$$C=\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha \quad \cdots⑩$$
とすると，
$$A^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2(\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma)$$
$$+2(\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha)$$
したがって，
$$A^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}B+2C$$
$$C=\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{4}B-\frac{3}{4} \quad \cdots⑪ \quad \cdots(け)$$
また，$z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$ とおくと，$z^7=1$ であるから，
$$\sum_{k=1}^{7}z^k=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+1$$
$$=\frac{1-z^7}{1-z}=0 \quad \cdots⑫ \quad \cdots(こ)$$
さらに⑧，⑨，⑩に対して
$$\alpha=\frac{\pi}{7},\ \beta=-\frac{2\pi}{7},\ \gamma=-\frac{3\pi}{7}$$
を代入する．⑨より
$$B=\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\left(-\frac{4}{7}\pi\right)+\cos\left(-\frac{6}{7}\pi\right)$$
$$=\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi$$
ここで，⑫の式の実部に注目すると，
$$\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi+\cos\frac{10}{7}\pi+\cos\frac{12}{7}\pi+\cos\frac{14}{7}\pi=0$$
$$\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{2}{7}\pi+1=0$$
したがって，
$$2B+1=0 \iff B=-\frac{1}{2} \quad \cdots⑬ \quad \cdots(さ)$$
さらに C の値は⑩より
$$C=\sin\frac{\pi}{7}\sin\left(-\frac{2}{7}\pi\right)+\sin\left(-\frac{2}{7}\pi\right)\sin\left(-\frac{3}{7}\pi\right)+\sin\left(-\frac{3}{7}\pi\right)\sin\frac{\pi}{7}$$
$$=-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{2}{7}\pi\sin\frac{3}{7}\pi-\sin\frac{3}{7}\pi\sin\frac{\pi}{7}$$
$$=g\left(\frac{\pi}{7}\right)$$
となるので，(2)の結果と合わせて
$$C=0 \quad \cdots⑭$$
以上から，A の値は⑪，⑬，⑭より，
$$0=\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4} \iff A^2=\frac{7}{4}$$
ところで，$\sin\frac{\pi}{7}<\sin\frac{2}{7}\pi<\sin\frac{3}{7}\pi$ であることから，
$$A=\sin\frac{\pi}{7}+\sin\left(-\frac{2}{7}\pi\right)+\sin\left(-\frac{3}{7}\pi\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2}{7}\pi-\sin\frac{3}{7}\pi<0$$
となるので，
$$A=-\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \cdots⑮ \quad \cdots(し)$$
このことから，$f\left(\frac{\pi}{7}\right)$ の値は，
$$f\left(\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi-\sin\frac{6}{7}\pi\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{3}{7}\pi-\sin\frac{\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot(-A) \quad \cdots⑯$$
と表せるので，⑮，⑯より
$$f\left(\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{8} \quad \cdots(す)$$

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．また設問(2)に答えなさい．

媒介変数表示

$$x=g(\theta)=\theta+\sin\theta,\ y=h(\theta)=1-\cos\theta\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

で表される座標平面上の曲線 C を考える．

(1) 曲線 C は点 $\left(\boxed{（あ）},\ \boxed{（い）}\right)$ において x 軸に接する．また，曲線 C 上の点の x 座標，y 座標の動く範囲はそれぞれ

$$\boxed{（う）}<x<\boxed{（え）},\quad \boxed{（お）}\leqq y<\boxed{（か）}$$

である．

(2) $\boxed{（う）}<x<\boxed{（え）}$ を満たす任意の x に対して，それを x 座標とする C 上の点 P はただ 1 つに決まることを示しなさい．また，この点 P の y 座標を $y=f(x)$ と書くとき，関数 $f(x)$ のグラフは下に凸であることを示しなさい．

(3) $0<t<\pi$ とする．曲線 C の $0\leqq\theta\leqq t$ に対する部分の長さ $L(t)$ を求めると，$L(t)=\boxed{（き）}$ である．

(4) $0<t<\pi$ に対する曲線 C 上の点 $(g(t),\ h(t))$ を P_t とするとき，P_t における C の接線を l_t とし，l_t と x 軸との交点を Q_t とする．Q_t の x 座標は $\boxed{（く）}$ であり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_t\mathrm{P}_t}$ が x 軸の正の向きとなす角は $\boxed{（け）}$ ラジアンである．

(5) 曲線 C が，x 軸に接しつつ，すべることなく右方向に回転する．回転する前の C 上の点 $\mathrm{P}_t(g(t),\ h(t))\ (0<t<\pi)$ が x 軸との接点になるまで C が回転したとき，回転する前の点 $\mathrm{P}_0(g(0),\ h(0))$ が点 $\mathrm{R}_t(a(t),\ b(t))$ に移動したとする．$a(t)$，$b(t)$ を t の式で表すと，

$$a(t)=\boxed{（こ）},\quad b(t)=\boxed{（さ）}$$

である．

(6) 動点 $\mathrm{R}_t\ (0<t<\pi)$ の軌跡，x 軸，および直線 $x=\alpha$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{（し）}$ である．ただし $\alpha=\displaystyle\lim_{t\to\pi-0}a(t)$ とする．

(1) $g(\theta)=\theta+\sin\theta,\ h(\theta)=1-\cos\theta\quad(-\pi<\theta<\pi)$

であるから，

$$g'(\theta)=1+\cos\theta,\ h'(\theta)=\sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{h'(\theta)}{g'(\theta)}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

曲線 C と x 軸との共有点は，$y=0$ を計算すると，

$$h(\theta)=1-\cos\theta=0$$

$-\pi<\theta<\pi$ であるから，$\theta=0$．

このとき，$\dfrac{dy}{dx}=0$ であり，x 軸に接することがわかる．

$$g(0)=0,\ h(0)=0$$

であるから，曲線 C は点 $(0,\ 0)$ において x 軸に接する．　…(あ)，(い)

また，$g(\theta)$，$h(\theta)$ について増減表を書くと次のようになる．

θ	$-\pi$	$\cdots$	π
$g'(\theta)$		$+$	
$g(\theta)$	$(-\pi)$	$\rightarrow$	(π)

θ	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$h'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$h(\theta)$	(2)	$\downarrow$	0	$\uparrow$	(2)

したがって，x 座標，y 座標の動く範囲は，

$$-\pi<x<\pi,\ 0\leqq y<2\quad\cdots(う)\sim(か)$$

(2) (1) より x は連続かつ単調増加である．よって，x と θ の値は 1 対 1 に対応する．θ が決まれば，点 P の座標が定まることと合わせて，任意の x に対して点 P がただ 1 つ定まる．

また，$y=f(x)$ に対して，

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

と計算できる．

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)=\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)-\sin\theta\cdot(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\cos\theta}$$

であるから，

$$f''(x)=\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}>0$$

したがって，関数 $f(x)$ のグラフは下に凸である．

(3)
$$L(t)=\int_0^t\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

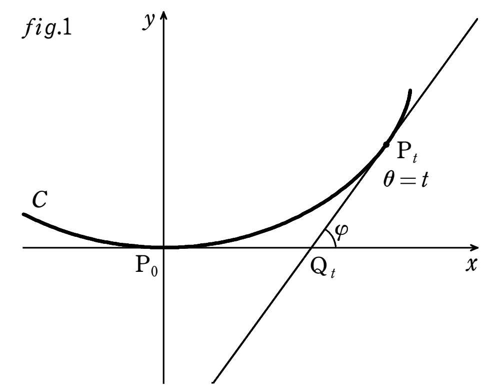
$$=\int_0^t\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^t 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^t=4\sin\frac{t}{2}\quad\cdots(き)$$

(4) (1) および (2) から C の概形がわかり，P_t，Q_t は以下のよう．

fig.1



C 上の点 $\mathrm{P}_t(g(\theta),\ h(\theta))$ における接線 l_t の方程式は，

$$l_t:\ y-h(t)=\frac{h'(t)}{g'(t)}\{x-g(t)\}$$

$$y-(1-\cos t)=\frac{\sin t}{1+\cos t}\{x-(t+\sin t)\}$$

ここで，$y=0$ を代入して整理すると，

$$x=t\quad\cdots(く)$$

また，この直線が x 軸正の向きとなす角を $\varphi\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，傾きを $\tan\varphi$ と表すことができるので，

$$\tan\varphi=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}=\tan\frac{t}{2}$$

$0<t<\pi$ であるから，$\varphi=\dfrac{t}{2}$ となる．これが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_t\mathrm{P}_t}$ と x 軸の正の向きとなす角に一致するので，求める角は $\varphi=\dfrac{t}{2}$ ラジアンである．　…(け)

(5) 曲線 C が x 軸に接しつつ，すべることなく右方向に回転するとき，$\mathrm{P}_0(g(0),\ h(0))$ は以下のように動く．

fig.2

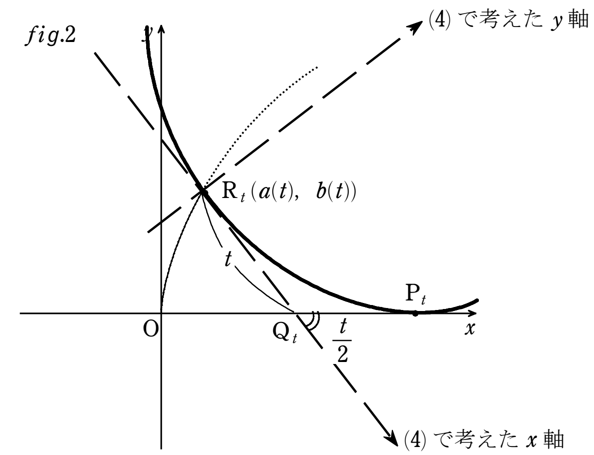


fig.2 より，x 軸がちょうど (4) の l_t と一致することに注意する．

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}_t}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}+\overrightarrow{\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t}$$

であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ}_t&=\mathrm{OP}_t-\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t=\overset{\frown}{\mathrm{P}_t\mathrm{R}_t}-\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\\&=L(t)-\sqrt{\{(t+\sin t)-t\}^2+(1-\cos t)^2}\\&=4\sin\frac{t}{2}-\sqrt{2(1-\cos t)}\\&=2\sin\frac{t}{2}\end{aligned}$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t}=t\begin{pmatrix}\cos\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\\ \sin\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-\cos\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2}\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}_t}=\begin{pmatrix}2\sin\frac{t}{2}\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\cos\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sin\frac{t}{2}-t\cos\frac{t}{2}\\ t\sin\frac{t}{2}\end{pmatrix}$$

したがって，

$$a(t)=2\sin\frac{t}{2}-t\cos\frac{t}{2}\quad\cdots(こ)$$

$$b(t)=t\sin\frac{t}{2}\quad\cdots(さ)$$

(6)　求める面積を S とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\alpha}y\,dx=\int_0^{\pi}b(t)a'(t)dt\\&=\int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}t^2(1-\cos t)dt\end{aligned}$$

ここで，

$(t^2\sin t)'=2t\sin t+t^2\cos t\quad\cdots①$

$(t\cos t)'=\cos t-t\sin t\quad\cdots②$

$(\sin t)'=\cos t\quad\cdots③$

①+②×2−③×2 より

$$t^2\cos t=(t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t)'$$

$$\int t^2\cos t\,dt=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C$$

したがって，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}t^3-(t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t)\right]_0^{\pi}\\&=\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi}{2}\quad\cdots(し)\end{aligned}$$

[講評]

出題内容は以下の通り．

1　小問集合

例年通りの出題．(3) がやや解きづらい．

2　確率漸化式

ここ最近は難易度が低下傾向にある確率の問題．
設定もそこまで複雑ではなく，慶応医学部志望であるならば対策をしっかりしている
だろうから満点が望ましい．

3　三角関数

最近よく出題される $\frac{\pi}{7}$ 関連の関係式．2018 では東海大 (1 日目)，2017 では日医 (前期)，
川崎医科などで出題されている．
(なお慶応医学部では 2008 年に三角関数 (チェビシェフの多項式) の出題がある)

4　微分積分総合

曲線を滑らずに転がすときの点の描く軌跡．$a(t)$, $b(t)$ を求める部分からは計算が重い．

昨年に比べて易化し，どの問題も時間があれば最後まで手がつきそうなセットである．
ただし，試験時間が 100 分であることを考慮すると合格ラインは 70 % ぐらいになるだろう．