1

正十角形において，次の問いに答えよ．

(1) 正十角形の内部で交わる2本の対角線は何組あるか．

(2) 3つの頂点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか．

(3) 3つの頂点を結んでできる三角形のうち，互いに合同でないのは何個あるか．

(4) どの2つも隣り合わないような3つの頂点の選び方は何通りあるか．

(5) 頂点を2つずつ結んで5本の線分を作るとき，どの2本も共有点をもたない選び方は何通りあるか．

【解説】

※ 正十角形の頂点の区別の有無については記載がないが，慣習に従い頂点を区別する．

正十角形の頂点を順に A_1，A_2，A_3，……，A_{10} とする．

(1) 10個の頂点から異なる4個の頂点を選ぶと，正十角形の内部で交わる2本の対角線の組が1組得られる．したがって，

$${}_{10}C_4=210\ (\text{組}) \quad \cdots\text{答}$$

(2) A_1 が頂角に対応する点であるような二等辺三角形は，$\triangle A_1A_2A_{10}$，$\triangle A_1A_3A_9$，$\triangle A_1A_4A_8$，$\triangle A_1A_5A_7$ の4個ある．この中に正三角形がなく，頂角に対応する点の選び方は10通りあるから，

$$4\cdot 10=40\ (\text{個}) \quad \cdots\text{答}$$

(3) 三角形の3個の頂点以外の7個の頂点は，3個の頂点によって分けられる．その個数を a，b，c 個として，

$$a+b+c=7, \quad (a,\ b,\ c \text{ は0以上の整数})$$

となる組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めればよい．

ただし，互いに合同でないものを数えるから，$a \leqq b \leqq c$ とする．

このような組は，

$(0,\ 0,\ 7)$，$(0,\ 1,\ 6)$，$(0,\ 2,\ 5)$，$(0,\ 3,\ 4)$，

$(1,\ 1,\ 5)$，$(1,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 3,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 3)$

の8個である． …答

(4) 選んだ頂点が A_k，A_l，$A_m\ (1 \leqq k < l < m \leqq 10)$ であるとする．

どの2つの頂点も隣り合わないための条件は，

$$k<l-1<m-2 \quad \text{かつ} \quad (k,\ m) \neq (1,\ 10)$$

$k<l-1<m-2$ となる $(k,\ l,\ m)$ の選び方は，${}_8C_3=56$ (通り)

その中で，$(k,\ m)=(1,\ 10)$ となる $(k,\ l,\ m)$ の選び方は，$3 \leqq l \leqq 8$ の6通り．

したがって，条件を満たす選び方は，

$$56-6=50\ (\text{通り}) \quad \cdots\text{答}$$

(5) 一般に，凸 $2n$ 角形（n は2以上の整数）において，頂点を2つずつ結んで n 本の線分を作るとき，どの2本も共有点をもたない選び方を a_n 通りとする．

このとき，求めるものは a_5 である．

(i) $n=2$ のとき，

頂点を順に $A_i\ (1 \leqq i \leqq 4)$ として，線分の選び方は $\{A_1A_2,\ A_3A_4\}$，$\{A_1A_4,\ A_2A_3\}$ の2通りであるから，$a_2=2$

(ii) $n=3$ のとき，

頂点を順に $A_i\ (1 \leqq i \leqq 6)$ とする．

A_1 を端点とする線分は A_1A_2，A_1A_4，A_1A_6 の場合があり，各場合に対して残りの線分の作り方は，

A_1A_2 …… a_2 通り

A_1A_4 …… 1通り

A_1A_6 …… a_2 通り

したがって，

$$a_3=2a_2+1=5$$

(iii) $n=4$ のとき，

頂点を順に $A_i\ (1 \leqq i \leqq 8)$ とする．

A_1 を端点とする線分は A_1A_2，A_1A_4，A_1A_6，A_1A_8 の場合があり，各場合に対して残りの線分の作り方は，

A_1A_2 …… a_3 通り

A_1A_4 …… a_2 通り

A_1A_6 …… a_2 通り

A_1A_8 …… a_3 通り

したがって，

$$a_4=2(a_3+a_2)=14$$

(iv) $n=5$ のとき，

頂点を順に $A_i\ (1 \leqq i \leqq 10)$ とする．

A_1 を端点とする線分は A_1A_2，A_1A_4，A_1A_6，A_1A_8，A_1A_{10} の場合があり，各場合に対して残りの線分の作り方は，

A_1A_2 …… a_4 通り

A_1A_4 …… a_3 通り

A_1A_6 …… ${a_2}^2$ 通り

A_1A_8 …… a_3 通り

A_1A_{10} …… a_4 通り

したがって，

$$a_5=2(a_4+a_3)+{a_2}^2=42$$

(iv) より，条件を満たす選び方は，42通り …答

2

四面体OABCがあり，AB＝BC＝CA＝2，OA＝OB＝OC＝3とする．頂点Aから平面OBCへ下した垂線の足をH，三角形ABCの重心をGとし，OGとAHの交点をPとする．さらに直線CPと平面OABの交点をQとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OH}$，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) 四面体OBCQの体積を求めよ．

【解答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=7$ (2) $\overrightarrow{OH}=\dfrac{7}{16}(\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{7}{23}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{7}{16}(\vec{a}+\vec{b})$

(3) $\dfrac{7\sqrt{23}}{48}$

3

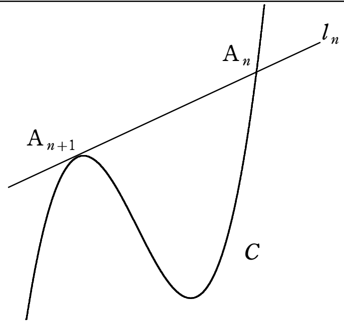
x の3次関数 $y=x^3-3x^2$ で表される曲線を C とする．C 上の点 A_n から，A_n とは異なる点 A_{n+1} を接点とする接線を引くことができるとき，A_n の x 座標を a_n，A_{n+1} の x 座標を a_{n+1}，接線を l_n とする．$a_1=3$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) a_n を n を用いて表せ．

(2) 接線 l_n の傾きをα_n とするとき，α_n を n を用いて表せ．

(3) 接線 l_n と曲線 C で囲まれた部分の面積を S_n とするとき，S_n を n を用いて表せ．

【解説】



(1) $f(x)=x^3-3x^2$ とおくとき，

$$f'(x)=3x(x-2)$$

点 $A_{n+1}\ (a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ における接線は，

$$y-f(a_{n+1})=f'(a_{n+1})(x-a_{n+1})$$

$$y=(3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1})x-2{a_{n+1}}^3+3{a_{n+1}}^2$$

これと $y=f(x)$ との共有点の x 座標を求めると，

$$x^3-3x^2=(3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1})x-2{a_{n+1}}^3+3{a_{n+1}}^2$$

$$x^3-3x^2-(3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1})x+2{a_{n+1}}^3-3{a_{n+1}}^2=0$$

この方程式の実数解が $x=a_{n+1}$ (重解)，a_n であるから，解と係数の関係より，

$$a_{n+1}+a_{n+1}+a_n=3 \iff a_{n+1}-1=-\frac{1}{2}(a_n-1)$$

$a_1=3$ より，

$$a_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad \cdots\text{答}$$

(2) 直線 l_n の傾きは，$f'(a_{n+1})$ であり，

$$f'(a_{n+1})=3\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2\right\}=3\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-1\right\} \quad \cdots\text{答}$$

(3) l_n : $y=m_nx+n_n$ とおくとき，共有点の x 座標を利用して

$$f(x)-(m_nx+n_n)=(x-a_{n+1})^2(x-a_n)$$

であるから，

$$S_n=\left|\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{f(x)-(m_nx+n_n)\}dx\right| =\left|\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_{n+1})^2(x-a_n)dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{12}(a_n-a_{n+1})^4\right|=\frac{1}{12}\left\{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}^4=\frac{27}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} \quad \cdots\text{答}$$

(注)

a_{n+1} と a_n の大小関係，C と l_n の上下関係が変化するが，絶対値をつけてまとめた．

[講評]

出題内容は以下の通り．

1　場合の数

各問いは独立しているので，自分の解ける問題を取捨選択できたかが鍵になりそうではある．

なお，(5) の解答で定義された a_n はカタラン数と呼ばれ，一般に $a_n = \dfrac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n$ である．

2　空間図形・ベクトル

空間ベクトルの基本問題．対称性に気づいていれば，答えに自信が持てる．

また，初等幾何的な解法も可能．

3　３次関数・数列

昨年に引き続き，3 次関数と数列の融合問題．ただし，問題文の読み間違えに注意したい．

昨年よりは場合の数の問題 $\boxed{1}$ がある分，より難化したと言える．$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ で得点し，

$\boxed{1}$ でどれだけ得点できるかで合否が決まりそうである．倍率のことも考えると 70 % は欲しい．