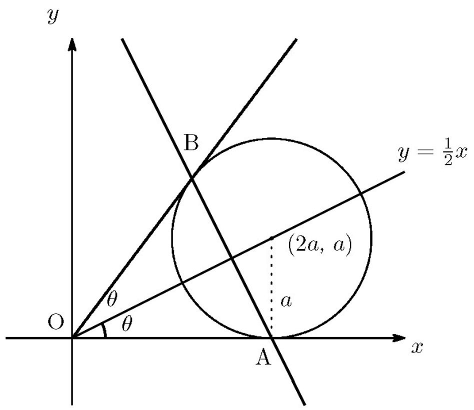
I

(1) まず与えられた円の式は,

$$x^2+y^2-4ax-2ay+4a^2=0$$
$$\therefore (x-2a)^2+(y-a)^2=a^2$$

より，$a>0$ に注意して中心 $(2a,\ a)$，半径 a の円を表す．

したがって，中心は直線 $\boxed{y=\frac{1}{2}x}$ 上にある．このとき，xy 平面上では以下のようになる．



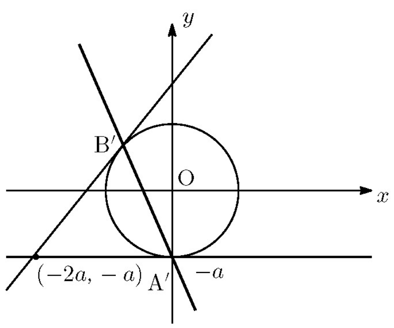
$y=mx$ は原点を通る傾き m の直線で，上図の太線を見れば m の値は 2 通りある．ひとつは $y=0$．つまり $\boxed{m=0}$

もう 1 つは図のように θ を定めると，$\tan\theta=\frac{1}{2}$ であるときの傾き $\tan 2\theta$ が求めるものとなる．したがって，tan の倍角公式より

$$m=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\boxed{\frac{4}{3}}.$$

(注) もちろん点と直線の距離公式でも，重解条件でも可

次に直線 AB の方程式は，円の中心が原点に一致するよう，$\begin{pmatrix}-2a\\-a\end{pmatrix}$ だけ平行移動し，A，B の移動した先を A′，B′ とすると以下のよう．



これより，直線 A′B′ は $(-2a,\ -a)$ を極とする極線であることがわかり，その方程式は

$$(-2a)x+(-a)y=a^2 \qquad \therefore\ y=-2x-a$$

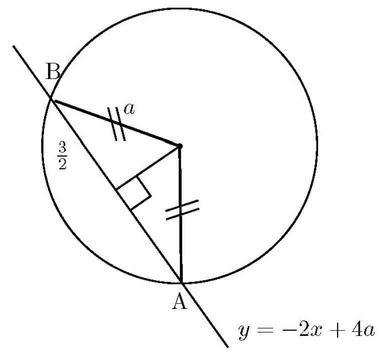
と求まり，直線 AB の傾きは，この直線の傾きと一致するので，その傾きは $\boxed{-2}$．また，これを再び $\begin{pmatrix}2a\\a\end{pmatrix}$ だけ平行移動して直線 AB の方程式は

$$y-a=-2(x-2a)-a \qquad \therefore\ y=-2x+4a$$

と求まる．

(注) 直線 AB が，最初に求めた直線と直交することから傾きは -2 とし，それが $(2a,\ 0)$ を通ることから求めるのが自然でしょう．

最後に，線分 AB の長さが 3 になるとき，以下のように中心と直線 AB の距離 d がピタゴラスの定理より $d=\sqrt{a^2-\frac{9}{4}}$ となる．



一方，d は点と直線の距離公式から

(直線を $2x+y-4a=0$ として)

$$d=\frac{|2\cdot 2a+a-4a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{5}} \qquad (\because\ a>0)$$

とも表せることから,

$$\frac{a}{\sqrt{5}}=\sqrt{a^2-\frac{9}{4}}$$
$$\frac{a^2}{5}=a^2-\frac{9}{4}$$
$$a^2=\frac{45}{16}$$
$$\therefore\ a=\boxed{\frac{3\sqrt{5}}{4}} \qquad (\because\ a>0)$$

(注) 円の中心を C として，四角形 OACB の面積を考えるのもよい．

(2) (a)

以下，$a-b$ が n で割り切れることを $a\equiv b \pmod{n}$ と合同式を用いて表すことにする．

問題文より $1020\equiv 8 \pmod{11}$ であるから，1020^3 を 11 で割った余りは，

$$\begin{aligned}1020^3 &\equiv 8^3 \pmod{11}\\ &\equiv 64\cdot 8\\ &\equiv 9\cdot 8\\ &\equiv 72\\ &\equiv 6\end{aligned}$$

より 1020^3 を 11 で割ったときの余りは $\boxed{6}$.

(b)

2 数 a，b の最大公約数，最小公倍数をそれぞれ G，L とすると，$ab=GL$ が成り立つので問題文の条件から

$$ab=1020^3\cdot 1020^{10}=1020^{13}.$$

これと，(a) の結果から

$$\begin{aligned}ab &\equiv 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 8 \pmod{11}\\ &\equiv 6\cdot 6\cdot 6\cdot 4\\ &\equiv 6\cdot 6\cdot 2\\ &\equiv 6\cdot 1\\ &\equiv 6\end{aligned}$$

と求まるので，積 ab を 11 で割ったときの余りは $\boxed{6}$.

また，$(a+b)^2$ を 1020 で割った余りは問題文より $a^2+b^2\equiv 10 \pmod{11}$ なので,

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &\equiv a^2+2ab+b^2 \pmod{11}\\ &\equiv 10+2\cdot 6\\ &\equiv 22\\ &\equiv 0\end{aligned}$$

より $(a+b)^2$ を 11 で割った余りは $\boxed{0}$.

同様にして，$(a-b)^2$ を 1020 で割った余りは

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &\equiv a^2-2ab+b^2 \pmod{11}\\ &\equiv 10-2\cdot 6\\ &\equiv -2\\ &\equiv 9\end{aligned}$$

より $(a-b)^2$ を 11 で割った余りは $\boxed{9}$.

最後にある数を 11 で割った余りは

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

のいずれかであるから，ある数の 2 乗を 11 で割った余りはそれぞれ

0, 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1

したがって $(a+b)^2$，$(a-b)^2$ の割った余りから

$$a+b\equiv 0,\ a-b\equiv 3 \pmod{11}$$

または，

$$a+b\equiv 0,\ a-b\equiv 8 \pmod{11}$$

であり，これをみたすものはそれぞれ

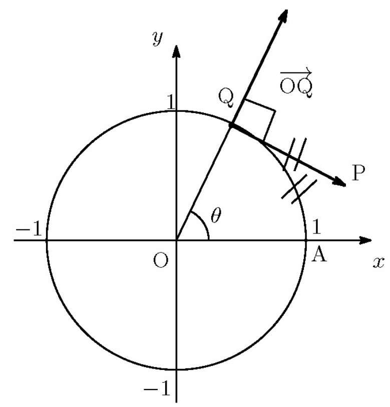
$$a\equiv 7,\ b\equiv 4 \pmod{11}$$

または，

$$a\equiv 4,\ b\equiv 7 \pmod{11}$$

であるから，a，b を小さいほうから順に $\boxed{4}$，$\boxed{7}$

(3) 問題の設定は以下のよう．



まず，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$$

であり，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{QP}$ をそれぞれ考えると，

$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.$$

また，$\overrightarrow{QP}$ は，線分 PQ の長さが (円 O に巻きつけられていたことから) 弧 AQ(図では劣弧) の長さに等しく θ で，$\overrightarrow{OQ}$ を時計回りに 90°．つまり $-\frac{\pi}{2}$ 回転させた方向であるから，

$\boxed{a=\frac{-1}{2}}$ で，

$$\overrightarrow{QP}=\theta\begin{pmatrix}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta\sin\theta\\ -\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

これらを代入して点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の位置ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x(\theta)\\ y(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+\theta\sin\theta\\ \sin\theta-\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

と表すことができる．したがって，

$$x'(\theta)=\theta\cos\theta,\ y'(\theta)=\theta\sin\theta$$

なので,

$$(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2=\theta^2$$

から $\theta=\alpha$ となるまで糸をほどいたとき，点 $\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ の描く曲線の長さ $L(\alpha)$ は

$$\begin{aligned}L(\alpha) &= \int_0^{\alpha}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,d\theta\\ &= \int_0^{\alpha}\theta\,d\theta \qquad (\because\ \theta>0)\\ &= \left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\alpha}\\ &= \frac{1}{2}\alpha^2\end{aligned}$$

と求まるので，$\boxed{b=\frac{1}{2}}$，$\boxed{c=2}$.

したがって，ちょうど糸をほどき終わるとき，すなわち$\alpha=2\pi$のときまでに点Pが描く曲線の長さは先ほどの式に$\alpha=2\pi$を代入して，

$$L(2\pi)=\frac{1}{2}(2\pi)^2=2\pi^2$$

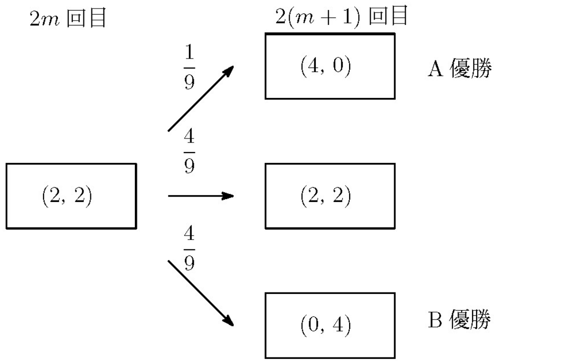
と求まるから，$\boxed{d=2}$，$\boxed{f=2}$.

II

(1) Aが勝つ確率が$\frac{1}{3}$で，A，Bの持ち点がともに2のとき，2ゲーム終了時にAが優勝する確率は，Aが2連勝するときで$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\boxed{\frac{1}{9}}$.

また，4ゲーム終了時にAが優勝するとき，4ゲームの勝者は順にABAA, BAAAとなるときで，$2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\boxed{\frac{4}{81}}$.

次に，Aが優勝するのは必ずゲームを偶数回行った後しかないことに注意すると$n=2m$回目に優勝する確率P_{2m}は，$2m$回目および$2(m+1)$回目でのA，Bの得点の推移が



(ただし，(Aの持ち点，Bの持ち点)と表す．以下も同様．)

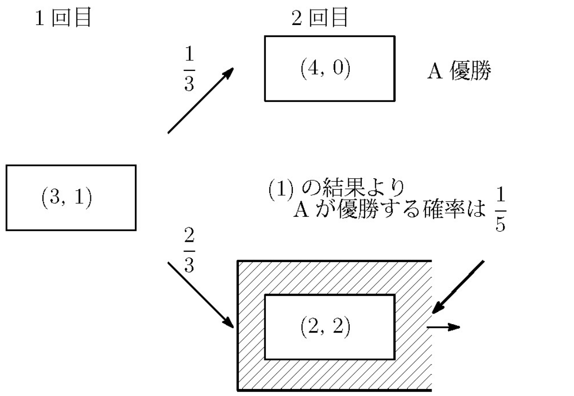
となることに注意すると，

$$P_{2m}=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{m-1}$$

これらを$m=1,2,3,\cdots$で足し合わせたものがAが優勝する確率であるから，

$$\therefore \sum_{m=1}^{\infty}P_{2m}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{m-1}=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\boxed{\frac{1}{5}}.$$

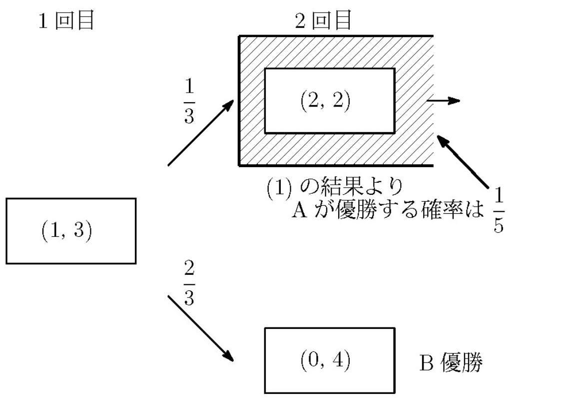
(2) Aが勝つ確率が$\frac{1}{3}$でAの持ち点が3，Bの持ち点が1のとき，Aが優勝するのは必ずゲームを奇数回行ったときしかないことに注意する．このとき，A，Bの得点の推移が



となるので，Aが優勝する確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\boxed{\frac{7}{15}}$$

同様にAの持ち点が1，Bの持ち点が3のとき，A，Bの得点の推移が



となるので，Aが優勝する確率は

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\boxed{\frac{1}{15}}$$

(3) Aが勝つ確率が$\frac{1}{3}$でA，Bの持ち点が3のとき，3ゲーム終了後Aの持ち点が4点になるのは3ゲームでAが2勝1敗のときで，反復試行の確率から

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\boxed{\frac{2}{9}}$$

3ゲーム終了後Aの持ち点が2点になるのは3ゲームでAが1勝2敗のときで，同様にして

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boxed{\frac{4}{9}}$$

また，Aが優勝する確率はAの持ち点がn点のとき，優勝する確率をQ_nとすると，漸化式

$$Q_n=\frac{1}{3}Q_{n+1}+\frac{2}{3}Q_{n-1}\quad(n=1,2,3,4,5)\cdots(\spadesuit)$$

が成り立ち，また，$Q_0=0$，$Q_6=1$である．($\spadesuit$)の特性方程式は

$$x=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$$

より，解が$x=1,2$であることに注意すれば，一般項は定数α，βを用いて

$$Q_n=\alpha\cdot 2^n+\beta$$

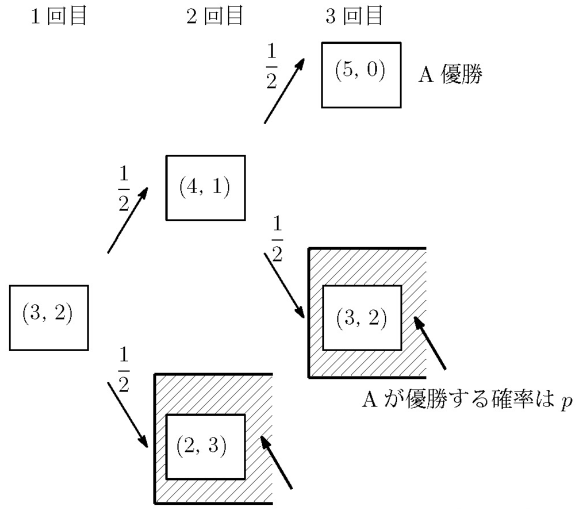
の形であるから，これを$Q_0=0$，$Q_6=1$をみたすように定めれば$\alpha=\beta=\frac{1}{63}$となり，

$$\therefore Q_n=\frac{2^n-1}{63}$$

と求まる．今考えていたのは$n=3$のときなので，代入して，

$$Q_3=\frac{2^3-1}{63}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

(4) Aが勝つ確率が$\frac{1}{2}$でAの持ち点が3，Bの持ち点が2のとき，ここからAが優勝する確率pを求める．A，Bの得点の推移は以下のよう．



AとBの立場が入れ替わったことに注意すれば，(3, 2)のときにBが優勝する確率で$1-p$

よって，1ゲーム目にAが勝ち，かつAが優勝するのは

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p\right)=\boxed{\frac{1}{4}p+\frac{1}{4}}$$

一方で1ゲーム目にAが負け，かつAが優勝するのは

$$\frac{1}{2}(1-p)$$

これらを足し合わせたものがAが優勝する確率pとなるので，

$$p=\frac{1}{4}p+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-p)$$

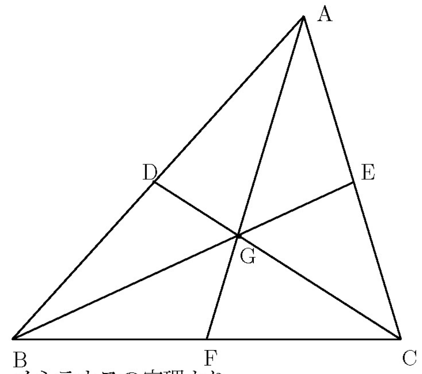
$$\therefore p=-\frac{1}{4}p+\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{5}{4}p=\frac{3}{4}$$

$$\therefore p=\boxed{\frac{3}{5}}$$

III

(1) 問題の設定は以下のよう．なお，3本の中線が1点で交わるのは問題文より既知とし，(2)を見据えて，AB，AC，BCの中点をそれぞれD，E，Fとおく．



メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\times\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}}\times\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GA}}=1$$

$$\therefore\ \mathrm{FG}:\mathrm{GA}=1:2$$

であることから，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\boxed{\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}}$$

と表せる．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$を始点をAにそろえて考えると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}&=-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\\&=-\frac{\vec{b}}{2}\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{\vec{c}}{2}\right)\\&=-\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2}{6}+\frac{|\vec{b}|^2}{4}\\&=\frac{|\vec{b}|^2}{12}-\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{6}\end{aligned}$$

ここで，

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

であるから，代入して，

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\boxed{\frac{|\vec{b}|^2}{12}-\frac{|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta}{6}}$$

(3) (外心は三角形ABCの各辺の垂直二等分線の交点であり，1点で交わることは既知とする．)

重心と外心が一致するとき，Gは外心でもあるので，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$は垂直であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}=0$$

$$\therefore\ |\vec{b}|^2-2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=0$$

$$\therefore\ |\vec{b}|=2|\vec{c}|\cos\theta\cdots①$$

同様に AC の中点を E とすると，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ は垂直であることから

$$\therefore\ |\vec{c}| = 2|\vec{b}|\cos\theta \cdots ②$$

① に ② を代入し，

$$|\vec{b}| = 4|\vec{b}|\cos^2\theta$$

$$\therefore\ \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \pm\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \quad (\because\ 0 < \theta < \pi)$$

となる．これを ①(または ②) に代入して，$|\vec{b}| > 0$ から，

$$\therefore\ |\vec{b}| = |\vec{c}|\ ,\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

と定まり，三角形 ABC は正三角形.

逆に三角形 ABC が正三角形のとき，各辺の垂直二等分線は中線でもあるので垂心と外心は一致する.

以上から求める必要十分条件は $\boxed{\text{三角形 ABC が正三角形}}$

[講評]

I

(1)：図形と式に関する問題．やることは標準的.

(2)：医学部の試験は多くがマーク式ということもあり，あまり整数問題は出題されない．そういう意味で面を食らった人も多かっただろう．しかし，これも誘導に乗れば完答は難しくない.

(3)：円の伸開線に関する問題．パラメータ表示を得る所，曲線の長さ共に求めるのは標準的．特に YMS 生は予想問題，直前講習の両方で曲線の長さを扱ったので，得点できた人も多いだろう.

II

難問ではあるが，有名な「破産の確率」に関する問題．経験の有無が大きく影響すると思われる.

III

ベクトルを題材にした証明問題．特に「内心，外心，垂心，重心のうち少なくとも 2 つが一致すれば正三角形」という事実を知っていれば，(3) の結果も容易にわかる．(1) は何が使ってよい事実なのかを自分で判断する必要がある．(2) の誘導もわかりやすい.

全体的に問題数も少なくなり，昨年よりも易化した．得点しやすい問題が多いので，70% 前後で合格ラインか.