解答速報

昭和大学医学部（Ⅰ期）　数学

2019年1月25日実施

1 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

複素数平面上の点 $z_0 = x_0 + iy_0$ を考える．また z_0 を極形式で表した場合の絶対値を r，偏角を θ_0 とし，θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である定数とする．原点 O を中心とし，点 z_0 を正の向きに角 θ（ラジアン）回転させた点と O を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点を $z_1 = x_1 + iy_1$ とする．次に O を中心とし，点 z_1 を正の向きに角 θ 回転させた点と O を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点を $z_2 = x_2 + iy_2$ とする．以下，同様にし，点 $z_n = x_n + iy_n$ を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) z_n を r，θ_0，θ および n を用いて表せ．

(2) $z_{n+1} - z_n = t(z_1 - z_0)$（$t$ は実数）となるような正の整数 n があるとき，n を求めよ．

(3) z_0，z_1，$\cdots$，z_n の実部を x 座標，虚部を y 座標とした xy 平面上の点を $P_0(x_0,\ y_0)$，$P_1(x_1,\ y_1)$，$\cdots$，$P_n(x_n,\ y_n)$ とする．$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ の面積を S_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ の和を r，θ を用いて表せ．

解答

(1)

$$z_{n+1} = \frac{2}{3}(\cos\theta + i\sin\theta)z_n$$

と表せるので，

$$\begin{aligned} z_n &= z_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= \boldsymbol{r\left(\frac{2}{3}\right)^n \{\cos(n\theta + \theta_0) + i\sin(n\theta + \theta_0)\}} \end{aligned}$$

(2) $\cos\theta + i\sin\theta = w$ とおく．このとき，

$$z_{n+1} - z_n = \frac{2}{3}wz_n - z_n = \left(\frac{2}{3}w - 1\right)z_n$$

$$z_1 - z_0 = \left(\frac{2}{3}w - 1\right)z_0$$

であるから，

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_1 - z_0} = \frac{z_n}{z_0} = \left(\frac{2}{3}\right)^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$\arg\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_1 - z_0} = n\theta$ であるから，これが実数となるとき，$n\theta = k\pi$ を満たすような正の整数 k が存在する．

このとき $n = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{\theta}k}$.

注釈

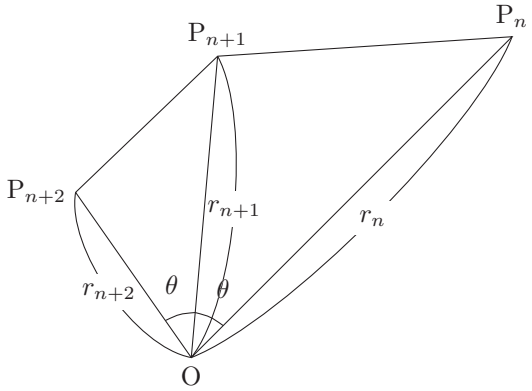
実数 t が存在しているので，$\dfrac{\pi}{\theta}$ が有理数である．

また，$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすので

$$0 < \frac{k\pi}{n} \leqq \frac{\pi}{2} \iff 0 < \frac{k}{n} \leqq \frac{1}{2}$$

も満たしている．

(3)



$\mathrm{OP}_n = r_n$ とおく．$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ の面積 S_n は

$$\begin{aligned}
S_n &= (\triangle \mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}) + (\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}) - (\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+2}) \\
&= \frac{1}{2}(r_n r_{n+1}\sin\theta + r_{n+1}r_{n+2}\sin\theta - r_n r_{n+2}\sin\theta) \\
&= \frac{1}{2}r^2\sin\theta\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 2\cos\theta\right) \\
&= r^2\sin\theta\left(\frac{13}{12} - \cos\theta\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_n &= r^2\sin\theta\left(\frac{13}{12} - \cos\theta\right)\cdot\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{5}r^2\sin\theta\left(\frac{13}{12} - \cos\theta\right)}
\end{aligned}$$

注釈

(2) は実数 t の存在条件を利用して θ を求めたが，n を実数 t を用いて表すならば，このような解答も作れるだろう．

$\triangle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ と $\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ は相似であり，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 : \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} = 1 : |t|$ と定める．このとき (1) よりその相似比は

$1 : \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ であるから,

$$
\begin{aligned}
|t| = \left(\frac{2}{3}\right)^n &\iff \log_2 |t| = n \log_2 \frac{2}{3} \\
&\iff n(1 - \log_2 3) = \log_2 |t| \\
&\iff n = \boldsymbol{\frac{\log_2 |t|}{1 - \log_2 3}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

1 から 99 までの自然数からなる集合を U とする．以下の問いに答えよ．

(1) U の要素のうち，100 との最大公約数が 1 より大きいもの全体からなる集合を $V^{(*)}$，V の要素のうち偶数個の正の約数をもつものの集合を W とする．A および B が U の部分集合で，次の 2 つの条件を満たすとするとき，集合 B の要素をすべて求めよ．

$$\text{(a)}\quad \overline{A}\cup B=V \qquad \text{(b)}\quad \overline{A}\cap\overline{B}=W$$

(2) U の要素から重複せず 50 個の要素を取り出した集合を X とする．X の作り方が x 通りあるとするとき，x の約数のうち，3^a（a は自然数）の形で表せる数で最大のものを求めよ．

(3) U の要素のうち，正の約数の個数が 100 の正の約数の個数よりも大きい要素はいくつあるか．また，そのうち正の約数の和が 100 の正の約数の和よりも大きくなる要素 n をすべて求めよ．

$(*)$ 解答後の注意を参照

解答

(1) $V=\{n\in U \mid n$ は 2 の倍数または, n は 5 の倍数 $\}$

また自然数について，正の約数が奇数個であることと，平方数であることは同値であるから，

$$\overline{W}=\{n\in U \mid n \text{ は平方数}\}$$

である．

条件 (b) の両辺の補集合を考えると $A\cup B=\overline{W}$ であるから，条件 (a) とあわせて考えると，$B=V\cap\overline{W}$ である．

したがって，

$$B=\{2^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 8^2\}=\mathbf{\{4,\ 16,\ 25,\ 36,\ 64\}}$$

である．

(2)

$$x={}_{99}\mathrm{C}_{50}=\frac{99!}{50!49!}=\frac{1}{100}\cdot\frac{100!}{50!50!}$$

である．100! と 50! に含まれる素因数 3 の個数を，それぞれ A，B とすると，

$$\begin{aligned}A&=\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]\\&=33+11+3+1\\&=48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\left[\frac{50}{3}\right]+\left[\frac{50}{3^2}\right]+\left[\frac{50}{3^3}\right]\\&=16+5+1\\&=22\end{aligned}$$

と計算される．したがって，求める数は $3^{A-2B}=3^4=\mathbf{81}$ である．

(3) $100=2^2\cdot5^2$ より，正の約数の個数は $(2+1)(2+1)=9$ 個，正の約数の和は $(1+2^1+2^2)(1+5+5^2)=217$ である．

まず，正の約数が 9 個よりも大きい U の要素は，次の **7** 個である．

$$48(=2^4\cdot 3)$$

$$60(=2^2\cdot 3\cdot 5)$$

$$72(=2^3\cdot 3^2)$$

$$80(=2^4\cdot 5)$$

$$84(=2^2\cdot 3\cdot 7)$$

$$90(=2\cdot 3^2\cdot 5)$$

$$96(=2^5\cdot 3)$$

また，これらの正の約数の和を求めると，

$$48\cdots(1+2^1+2^2+2^3+2^4)(1+3)=124$$

$$60\cdots(1+2+2^2)(1+3)(1+5)=168$$

$$72\cdots(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=195$$

$$80\cdots(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+5)=186$$

$$84\cdots(1+2+2^2)(1+3)(1+7)=224$$

$$90\cdots(1+2)(1+3+3^2)(1+5)=234$$

$$96\cdots(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3)=252$$

となる．したがって，正の約数の和が 217 よりも大きくなるものは，$n=$ **84，90，96** である．

注釈

(3) で U の要素を数え上げるとき，99 以下の整数のうち，異なる素数の約数を何個持っているかで場合分けをするともれなく数えられる．

(ア)　1 個のとき：$n=p^a$（p は素数，a は 1 以上の整数）

このとき，正の約数の個数は $a+1$ 個であるから，$a+1>9$．よって $a\geqq 9$ である．

$p\geqq 2$ であり，$n\geqq 2^9=512>100$ であるから，条件を満たす U の要素は存在しない．

(イ)　2 個のとき：$n=p^aq^b$（$p,\ q$ は素数，$p<q$，$a,\ b$ は 1 以上の整数）

正の約数の個数は $(a+1)(b+1)$ 個であり，$(a+1)(b+1)>9$．これを満たす $(a,\ b)$ の組は，

$$(a,\ b)=(1,\ 4\text{ 以上}),\ (2,\ 3\text{ 以上}),\ (3,\ 2\text{ 以上}),\ (4\text{ 以上，なんでもよい})$$

の場合である．それぞれの場合において，小さい数から順に吟味する．

①　$(a,\ b)=(1,\ 4\text{ 以上})$

$p\geqq 2,\ q\geqq 3$ であり $n\geqq 2\cdot 3^4=162>100$ より不適．

②　$(a,\ b)=(2,\ 3\text{ 以上})$

$p\geqq 2,\ q\geqq 3$ であり $n\geqq 2^2\cdot 3^3=108>100$ より不適．

③　$(a,\ b)=(3,\ 2\text{ 以上})$

$p=2,\ q=3$ のとき

- $(a,\ b)=(3,\ 2)$ ならば $n=2^3\cdot 3^2=72$ は適する．
- $(a,\ b)=(3,\ 3\text{ 以上})$ ならば $n\geqq 2^3\cdot 3^3=216>100$ より不適．

$p\geqq 2,\ q\geqq 5$ のとき $n\geqq 2^3\cdot 5^2=200>100$ より不適．

④ $(a,\ b) = (4$ 以上，なんでもよい$)$

$p = 2,\ q = 3$ のとき

- $(a,\ b) = (4,\ 1)$ ならば $n = 2^4 \cdot 3 = 48$ は適する．
- $(a,\ b) = (5,\ 1)$ ならば $n = 2^5 \cdot 3 = 96$ は適する．
- $(a,\ b) = (4$ 以上，2 以上$)$ ならば $n \geqq 2^4 \cdot 3^2 = 144 > 100$ より不適．

$p = 2,\ q = 5$ のとき

- $(a,\ b) = (4,\ 1)$ ならば $n = 2^4 \cdot 5 = 80$ は適する．
- $(a,\ b) = (4$ 以上，2 以上$)$ ならば $n \geqq 2^4 \cdot 5^2 = 400 > 100$ より不適．

$p = 2,\ q \geqq 7$ のとき $n \geqq 2^4 \cdot 7^1 = 112 > 100$ より不適．

$p \geqq 3,\ q \geqq 5$ のとき $n \geqq 3^4 \cdot 5^1 = 405 > 100$ より不適．

(ウ) 3 個のとき：$n = p^a q^b r^c$（$p,\ q,\ r$ は素数，$p < q < r$，$a,\ b,\ c$ は 1 以上の整数）

正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)$ 個であり，$(a+1)(b+1)(c+1) > 9$．これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組を a が小さいものから順に吟味する．

① $(a,\ b,\ c) = (1,\ 2,\ 1)$ のとき

$(p,\ q,\ r) = (2,\ 3,\ 5)$ のとき $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ は適する．

$(p,\ q,\ r) = (2$ 以上，3 以上，7 以上$)$ のとき $n \geqq 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126 > 100$ より不適．

② $(a,\ b,\ c) = (1,\ 2,\ 2$ 以上$)$ のとき $n \geqq 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450 > 100$ より不適．

③ $(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 2$ 以上$)$ のとき $n \geqq 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150 > 100$ より不適．

④ $(a,\ b,\ c) = (2,\ 1,\ 1)$ のとき

$(p,\ q,\ r) = (2,\ 3,\ 5)$ のとき $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ は適する．

$(p,\ q,\ r) = (2,\ 3,\ 7)$ のとき $n \geqq 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ は適する．

$(p,\ q,\ r) = (2$ 以上，5 以上，7 以上$)$ のとき $n \geqq 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140 > 100$ より不適．

以上より 48，60，72，80，84，90，96 が求めるものである．

注意

本来の問題文では

> U の要素のうち，100 との最大公約数が 1 より大きいもの全体からなる集合を V，U の要素のうち偶数個の正の約数をもつものの集合を W とする．

と表記されている。しかし，

- $\overline{A} \cup B = V \Longrightarrow \overline{A} \subset V$
- $\overline{A} \cap \overline{B} = W \Longrightarrow \overline{A} \supset W$

となり $W \subset \overline{A} \subset V$ となる．一方，本来の問題文では $V \subset W$ となる．これらは矛盾する．

そのため，問題文の (1) について，出題数が想定していたであろう問題文に変更し，その解答を書いた．

$\boxed{3}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1)　$3x+7y=2019$ を満たす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ は全部で何組あるか求めよ．

(2)　2 つの 3 次関数 $f(x)=x^3+3x^2-1$ と $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ がある．方程式 $f(x)=0$ の解を α，β，γ とするとき，方程式 $g(x)=0$ の解は α^2，β^2，γ^2 である．a，b，c の値を求めよ．

(3)　1 つのサイコロを投げることをくり返し，出た目の和が 5 以上になったら終わることにする．

(3-1)　1 回投げて終わる確率を求めよ．

(3-2)　2 回投げて終わる確率を求めよ．

(3-3)　終わるまでに投げる回数の期待値（平均値）を求めよ．

解答

(1)　$3x+7y=2019 \quad \cdots ①$

$$3\cdot(-2)+7\cdot 1=1$$

であるから，両辺を 2019 倍して

$$3\cdot(-4038)+7\cdot 2019=2019 \quad \cdots ②$$

① − ② から

$$3(x+4038)+7(y-2019)=0$$

3 と 7 は互いに素なので，整数 k を用いて

$$x+4038=7k,\ y-2019=-3k$$

$$\therefore\ x=7k-4038,\ y=-3k+2019$$

と表すことができる．$x>0,\ y>0$ から

$$\frac{4038}{7}<k<\frac{2019}{3}.$$

これを満たす整数 k は $577\leqq k\leqq 673$ であり，求める値は **96** 個である．

別解

① を変形すると，

$$7y=3(673-x)$$

$$\iff \frac{y}{3}=\frac{673-x}{7}$$

と変形できるので，上の解答と同様に，

$$x=673-7k,\ y=3k$$

と一般解が定まる．

(2)　$f(x)=x^3+3x^2-1$，$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ とおくとき，解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-3\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\\ \alpha\beta\gamma=1\end{cases}$$

これを用いると，

$$\begin{aligned} a &= -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\ &= \{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} \\ &= \mathbf{-9} \\ b &= \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \\ &= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= \mathbf{6} \\ c &= -\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\ &= -(\alpha\beta\gamma)^2 \\ &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

である．

別解

$f(x)=0$ より

$$x^3 = -3x^2+1$$

である．両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} & x^6 = (-3x^2+1)^2 \\ \iff & x^6 - 9x^4 + 6x^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

である．ここで $x^2 = X$ とおくと $X^3 - 9X^2 + 6X - 1 = 0$ であるが，これは $X = \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2$ を解に持つ方程式である．

(3)(3-1)　1 回投げて終わるのは，サイコロの目が 5 または 6 となるときであるから $\dfrac{2}{6} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$.

(3-2)　2 回投げて終わるのは，

1 回目の目が 1 のとき，2 回目の目が 4，5，6 のいずれかのとき：$\dfrac{3}{6}$

1 回目の目が 2 のとき，2 回目の目が 3，4，5，6 のいずれかのとき：$\dfrac{4}{6}$

1 回目の目が 3 のとき，2 回目の目が 2，3，4，5，6 のいずれかのとき：$\dfrac{5}{6}$

1 回目の目が 4 のとき，このとき 2 回目の目はどれでもよい：1

したがって求める確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times 1 = \mathbf{\frac{1}{2}}.$$

(3-3)　4 回投げて終わるのは，「3 回連続で 1 の目がでて，4 回目に 2 以上の目が出る」場合と，「3 回の和が 4 となり，4 回目は何でもよい」という場合であるため，その確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} + {}_3\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{23}{6^4}.$$

5 回投げて終わるのは，4 回連続で 1 の目が出るときであるため $\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{1}{6^4}$.

3 回投げて終わるのは，余事象を考えれば，

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6^4}+\frac{23}{6^4}\right)=\frac{4}{3^3}$$

である．したがって，求める期待値 E は，

$$E=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{4}{3^3}+4\cdot\frac{23}{6^4}+5\cdot\frac{1}{6^4}=\mathbf{\frac{2401}{1296}}$$

である．

別解

出た目の和が n となるまでに投げる回数の期待値を $E(n)$ とおく．$E(1)=1$ である．和が 2 となるまでに投げる回数は，以下の 2 通りである．

(ア)　1 回目に 1 が出るとき，2 回目以降の回数の期待値は $E(1)$ であり，

$$\frac{1}{6}\times(1+E(1)).$$

(イ)　1 回目に 2 以上の目が出れば，1 回で終わるので，

$$\frac{5}{6}\times 1.$$

したがって，$E(2)=\frac{1}{6}\{1+E(1)\}+\frac{5}{6}\cdot 1=1+\frac{1}{6}E(1)$ である．

和が 3 となるまでに投げる回数は，以下の 3 通りである．

(ア)　1 回目に 1 が出るとき，2 回目以降の回数の期待値は $E(2)$ であり，

$$\frac{1}{6}\times(1+E(2)).$$

(イ)　1 回目に 2 が出るとき，2 回目以降の回数の期待値は $E(1)$ であり，

$$\frac{1}{6}\times(1+E(1)).$$

(ウ)　1 回目に 3 以上の目が出れば，1 回で終わるので，

$$\frac{4}{6}\times 1.$$

したがって，$E(3)=\frac{1}{6}\{1+E(1)\}+\frac{1}{6}\{1+E(2)\}+\frac{4}{6}\cdot 1=1+\frac{1}{6}\{E(1)+E(2)\}$ である．

同様に考えると，$n\leqq 6$ のとき，

$$E(n+1)=1+\frac{1}{6}\{E(1)+E(2)+\cdots+E(n)\}$$

が得られる．いま，$T(n)=E(1)+E(2)+\cdot+E(n)$ とおくとき，

$$E(n+1)==1+\frac{1}{6}T(n)$$
$$\Longleftrightarrow T(n)=6E(n+1)-6$$

したがって，$n\geqq 2$ として

$$T(n+1)-T(n)=6\{E(n+1)-E(n)\}$$

である．$T(n)-T(n-1)=E(n)$ であるから，

$$E(n)=6E(n+1)-6$$

$$\iff E(n+1)=\frac{7}{6}E(n)$$

である．これは $n=1$ のときも成り立つので，$E(n)=\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$ である．

ゆえに求める期待値は $E(5)=\left(\frac{7}{6}\right)^{4}=\boldsymbol{\frac{2401}{1296}}$ である．

$\boxed{4}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ のとき，$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ を求めよ．

(2) 曲線 $|\log_3 x|+|\log_3 y|=2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) $\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

解答

(1) $f'(x)=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}=-\dfrac{1}{1+\sin x}$ より，

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}}$.

(2) $|\log_3 x|+|\log_3 y|=2 \quad \cdots$① とする．

(i) $x \geqq 1,\ y \geqq 1$ のとき，

① $\iff \log_3 x+\log_3=2 \iff \log_3 xy=2 \iff y=\dfrac{9}{x}$

(ii) $x \geqq 1,\ 0<y \leqq 1$ のとき，

① $\iff \log_3 x-\log_3=2 \iff \log_3 \dfrac{x}{y}=2 \iff y=\dfrac{1}{9}x$

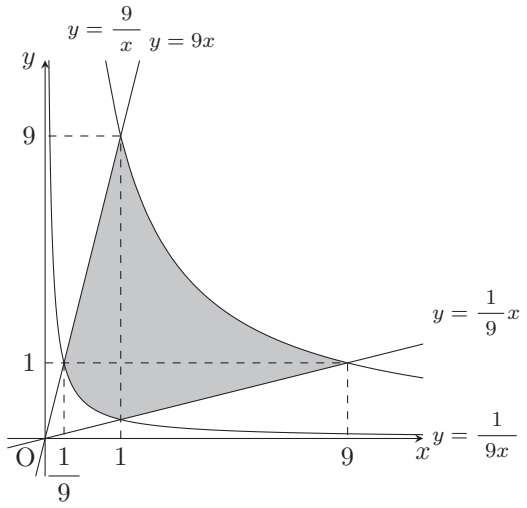
(iii) $0<x \leqq 1,\ y \geqq 1$ のとき，

① $\iff -\log_3 x+\log_3=2 \iff \log_3 \dfrac{y}{x}=2 \iff y=9x$

(iv) $0<x \leqq 1,\ 0<y \leqq 1$ のとき，

① $\iff -\log_3 x-\log_3=2 \iff \log_3 xy=-2 \iff y=\dfrac{1}{9x}$

ゆえに図形は下図のようになる．



したがって，求める面積を S とすると，

$$S=\int_{\frac{1}{9}}^{1}\left(9x-\frac{1}{9x}\right)dx+\int_{1}^{9}\left(\frac{9}{x}-\frac{1}{9}x\right)dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{160}{9}\log 3}.$$

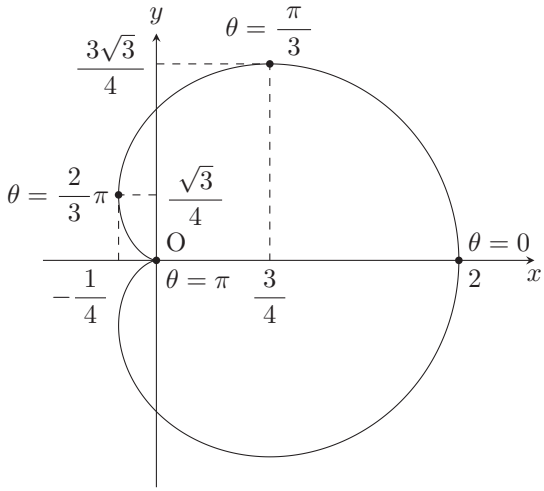
注釈

図形は原点を中心に相似拡大して得られる 2 つの図形から求めることもできる．

(3)　与えられた条件から描かれる図形はカージオイドである．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta(1+2\cos\theta) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = (2\cos\theta-1)(\cos\theta+1) \end{cases}$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$		$-$	0	$+$	
x	2	$\leftarrow$	$\frac{3}{4}$	$\leftarrow$	$-\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\uparrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\downarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\downarrow$	0



$y \geqq 0$ の部分を x 軸まわりに回転すればよいので，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ の部分を y_+ と表し，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の部分を y_- と表すと，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-\frac{1}{4}}^{2} {y_+}^2 dx - \pi\int_{-\frac{1}{4}}^{0} {y_-}^2 dx \\ &= \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0} y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta - \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= -\pi\int_{0}^{\pi} y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= \pi\int_{0}^{\pi}\{(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot\sin\theta(1+2\cos\theta)\}d\theta \end{aligned}$$

である．ここで，$\cos\theta = t$ とおくと

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{1}(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)dt \\ &= 2\pi\int_{0}^{1}(1+4t^2-5t^4)dt \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}. \end{aligned}$$

注釈

カージオイド曲線は極方程式により，$r = 1 + \cos\theta$ と表すことができる．
このとき，x 軸まわりに回転した立体の体積は，

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta d\theta$$

として求めることができる．これを利用してもよい．

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{\pi} \frac{2}{3}\pi(1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{1} (1+t)^3 dt \\ &= \frac{2}{3}\pi \Big[\frac{1}{4}(1+t)^4\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$ ［複素数平面］
点列の問題．漸化式との融合だが，定数 θ，r があり，式が複雑になった．

$\boxed{2}$ ［整数］
集合の要素の個数を丁寧に数え上げる必要があるが，もれなく考えるのは難しかっただろう．

$\boxed{3}$ ［小問集合（整数，高次方程式，確率）］
(3) は期待値を求める問題．じっくりと時間をかけて丁寧に解いてほしい．

$\boxed{4}$ ［小問集合（数学 III）］
媒介変数で表された曲線（カージオイド）による回転体の体積の問題は頻出テーマだったので正確に値を出して欲しい．

大問 4 つの構成は変わらず，すべてが結果のみを答える問題であった．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ は大問，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ は小問集合であるが，小問集合のほうがときやすかった．全体で 5 割取れれば十分に可能性はあるだろう．

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS
heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録
LINE 登録