【解答】

$\boxed{1}$ (1) $z_n=r\left(\frac{2}{3}\right)^n\{\cos(n\theta+\theta_0)+i\sin(n\theta+\theta_0)\}$

(2) $n=\frac{\pi}{\theta}k$ (k は n を自然数にするような整数)

(3) $\frac{4}{5}r^2\sin\theta\left(\frac{13}{12}-\cos\theta\right)$

$\boxed{2}$ (1) $B=\{4,\ 16,\ 25,\ 36,\ 64\}$

(2) $3^4=81$ ($a=4$)

(3) 48，60，72，80，84，90，96　の７つ，　84，90，96

$\boxed{3}$ (1) 96 個

(2) $a=-9$，$b=6$，$c=-1$

(3) (3−1) $\frac{1}{3}$　(3−2) $\frac{1}{2}$　(3−3) $\frac{2401}{1296}$

$\boxed{4}$ (1) $-\frac{2}{3}$

(2) $\frac{160}{9}\log 3$

(3) $\frac{8}{3}\pi$

【講評】

大問 4 つの構成は変わらず，すべてが結果のみを答える問題であった．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ は大問，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ は小問集合であるが，小問集合の方が解きやすかった．全体で 5 割取れれば十分に可能性はあるだろう．

$\boxed{1}$　複素数平面

点列の問題．漸化式との融合だが，定数 θ，r があり，式が複雑になった．

$\boxed{2}$　整数

集合の要素の個数を丁寧に数え上げる必要があるが，もれなく考えるのは難しかっただろう．

$\boxed{3}$　小問集合　（整数，高次方程式，確率）

(3) は期待値を求める問題．じっくりと時間をかけて丁寧に解いてほしい．

$\boxed{4}$　小問集合　（数学Ⅲ）

媒介変数で表された曲線（カージオイド）による回転体の体積の問題は頻出テーマだったので正確に値を出して欲しい．

$\boxed{1}$

次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみ解答欄に記入せよ．

複素数平面上の点 $z_0=x_0+iy_0$ を考える．また z_0 を極形式で表した場合の絶対値を r，偏角を θ_0 とし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする．原点 O を中心とし，点 z_0 を正の向きに角 θ（ラジアン）回転させて点と O を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点を $z_1=x_1+iy_1$ とする．次に O を中心とし，点 z_1 を正の向きに角 θ 回転させた点と O を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点を $z_2=x_2+iy_2$ とする．以下，同様にし，点 $z_n=x_n+iy_n$ を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　z_n を r，θ_0，θ および n を用いて表せ．

(2)　$z_{n+1}-z_n=t(z_1-z_0)$（t は実数）となるような正の整数 n があるとき，n を求めよ．

(3)　z_0，z_1，$\cdots$，z_n の実部を x 座標，虚部を y 座標とした xy 平面上の点を $P_0(x_0,\ y_0)$，$P_1(x_1,\ y_1)$，$\cdots$，$P_n(x_n,\ y_n)$ とする．$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ の面積を S_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}S_n$ の和を r，θ を用いて表せ．

解答　(1)　$z_n=r\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\{\cos(n\theta+\theta_0)+i\sin(n\theta+\theta_0)\}$

(2)　$n=\dfrac{\pi}{\theta}k$（k は n を自然数にするような整数）　(3)　$\dfrac{4}{5}r^2\sin\theta\left(\dfrac{13}{12}-\cos\theta\right)$

(1)
$$z_{n+1}=\frac{2}{3}(\cos\theta+i\sin\theta)z_n$$
と表せるので，
$$z_n=z_0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$=r\left(\frac{2}{3}\right)^n\{\cos(n\theta+\theta_0)+i\sin(n\theta+\theta_0)\}$$

(2)　$\cos\theta+i\sin\theta=w$ とおく．このとき，
$$z_{n+1}-z_n=\frac{2}{3}wz_n-z_n=\left(\frac{2}{3}w-1\right)z_n$$
$$z_1-z_0=\left(\frac{2}{3}w-1\right)z_0$$
であるから，
$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_1-z_0}=\frac{z_n}{z_0}=\left(\frac{2}{3}\right)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$
$arg\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_1-z_0}=n\theta$ であるから，これが実数となるとき，
$$n\theta=k\pi$$
を満たすような正の整数 k が存在する．このとき，
$$n=\frac{\pi}{\theta}k$$

【注】

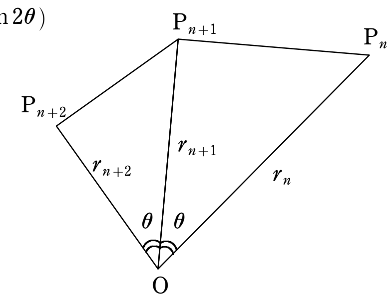
実数 t が存在しているので，$\dfrac{\pi}{\theta}$ が有理数である．

また，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たすので
$$0<\frac{k\pi}{n}\leqq\frac{\pi}{2}\iff 0<\frac{k}{n}\leqq\frac{1}{2}$$
も満たしている．

(3)　$\mathrm{OP}_n=r_n$ とおく．$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ の面積 S_n は

$S_n=(\triangle\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2})+(\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1})-(\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+2})$
$$=\frac{1}{2}(r_nr_{n+1}\sin\theta+r_{n-1}r_{n+2}\sin\theta-r_nr_{n+2}\sin2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-2\cos\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta\left(\frac{13}{6}-2\cos\theta\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}$$



したがって，
$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n=r^2\sin\theta\left(\frac{13}{12}-\cos\theta\right)\cdot\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}$$
$$=\frac{4}{5}r^2\sin\theta\left(\frac{13}{12}-\cos\theta\right)$$

【補足】

(2) は実数 t の存在条件を利用して θ を求めたが，n を実数 t を用いて表すならば，このような解答も作れるだろう．

$\triangle\mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ と $\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ は相似であり，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1:\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}=1:|t|$ と定める．このとき，(1) よりその相似比は $1:\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ であるから，
$$|t|=\left(\frac{2}{3}\right)^n\iff\log_2|t|=n\log_2\frac{2}{3}$$
$$\iff n(1-\log_23)=\log_2|t|$$
$$\iff n=\frac{\log_2|t|}{1-\log_23}$$

2

次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．
1 から 99 までの自然数からなる集合を U とする．以下の問いに答えよ．

(1)　U の要素のうち，100 との最大公約数が 1 より大きいもの全体からなる集合を V，U の要素のうち偶数個の正の約数をもつものの集合を W とする．A および B が U の部分集合で，次の 2 つの条件を満たすとするとき，集合 B の要素をすべて求めよ．

(a)　$\overline{A}\cup B=V$　　　　(b)　$\overline{A}\cap\overline{B}=W$

(2)　U の要素から重複せず 50 個の要素を取り出した集合を X とする．X の作り方が x 通りあるとするとき，x の約数のうち，3^a（a は自然数）の形で表せる数で最大のものを求めよ．

(3)　U の要素のうち，正の約数の個数が 100 の正の約数の個数よりも大きい要素はいくつあるか．また，そのうち正の約数の和が 100 の正の約数の和よりも大きくなる要素 n をすべて求めよ．

解答　(1)　$B=\{4,\ 16,\ 25,\ 36,\ 64\}$　　(2)　81　　(3)　7 個，$n=84,\ 90,\ 96$

(1)　$V=\{n\in U\mid n$ は 2 の倍数または n は 5 の倍数$\}$
また自然数について，正の約数が奇数個であることと，平方数であることは同値であるから，

$$\overline{W}=\{n\in U\mid n\text{ は平方数}\}$$

条件 (b) の両辺の補集合を考えると $A\cup B=\overline{W}$ であるから，条件 (a) とあわせて考えると，

$$B=V\cap\overline{W}$$

したがって，

$$B=\{2^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 8^2\}=\{4,\ 16,\ 25,\ 36,\ 64\}\quad\cdots\text{答}$$

(2)　$x={}_{99}\mathrm{C}_{50}=\dfrac{99!}{50!49!}=\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{100!}{50!50!}$

100! と 50! に含まれる素因数 3 の個数を，それぞれ A，B とすると，

$$A=\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]=33+11+3+1=48$$

$$B=\left[\frac{50}{3}\right]+\left[\frac{50}{3^2}\right]+\left[\frac{50}{3^3}\right]=16+5+1=22$$

したがって求める数は，

$$3^{A-2B}=3^4=81\quad\cdots\text{答}$$

(3)　$100=2^2\cdot5^2$ より，正の約数の個数は $(2+1)(2+1)=9$ (個)，
正の約数の和は $(1+2^1+2^2)(1+5^1+5^2)=217$
まず，正の約数が 9 個よりも大きい U の要素は，次の 7 個である．　…答

$48\ (=2^4\cdot3)$
$60\ (=2^2\cdot3\cdot5)$
$72\ (=2^3\cdot3^2)$
$80\ (=2^4\cdot5)$
$84\ (=2^2\cdot3\cdot7)$
$90\ (=2\cdot3^2\cdot5)$
$96\ (=2^5\cdot3)$

また，これらの正の約数の和を求めると，

$48\cdots(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)=124$
$60\cdots(1+2+2^2)(1+3)(1+5)=168$
$72\cdots(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)=195$
$80\cdots(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+5)=186$
$84\cdots(1+2+2^2)(1+3)(1+7)=224$
$90\cdots(1+2)(1+3+3^2)(1+5)=234$
$96\cdots(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3)=252$

したがって，正の約数の和が 217 よりも大きくなるものは，$n=84,\ 90,\ 96$　…答

【補足】(3) で U の要素を数え上げるとき，99 以下の整数のうち，異なる素数の約数を何個持っているかで場合分けするともれなく数えられる．

(ア)　1 個のとき：$n=p^a$（p は素数，a は 1 以上の整数）
このとき，正の約数の個数は $a+1$ 個であるから，$a+1>9$．よって $a\geqq9$ である．
$p\geqq2$ であり，$n\geqq2^9=512$ であるから，条件を満たす U の要素は存在しない．

(イ)　2 個のとき：$n=p^a\cdot q^b$（p，q は素数，$p<q$，a，b は 1 以上の整数）
正の約数の個数は $(a+1)(b+1)$ 個であり，$(a+1)(b+1)>9$．これを満たす $(a,\ b)$ の組は，

$(a,\ b)=(1,\ 4$ 以上$)$，$(2,\ 3$ 以上$)$，$(3,\ 2$ 以上$)$，$(4$ 以上，何でもよい$)$

の場合である．それぞれの場合において，小さい数から順に吟味する．

①　$(a,\ b)=(1,\ 4$ 以上$)$
　$p\geqq2$，$q\geqq3$ であり　$n\geqq2\cdot3^4=162>100$　なので不適．
②　$(a,\ b)=(2,\ 3$ 以上$)$
　$p\geqq2$，$q\geqq3$ のとき　$n\geqq2^2\cdot3^3=108>100$　なので不適．
③　$(a,\ b)=(3,\ 2$ 以上$)$
　$p=2$，$q=3$ のとき　$(a,\ b)=(3,\ 2)$ ならば　$n=2^3\cdot3^2=72$　適する
　　$(a,\ b)=(3,\ 3$ 以上$)$ ならば　$n\geqq2^3\cdot3^3=216>100$　なので不適．
　$p\geqq2$，$q\geqq5$ のとき　$n\geqq2^3\cdot5^2=200>100$　なので不適．
④　$(a,\ b)=(4$ 以上，何でもよい$)$
　$p=2$，$q=3$ のとき　$(a,\ b)=(4,\ 1)$ ならば　$n=2^4\cdot3=48$　適する
　　$(a,\ b)=(4,\ 2$ 以上$)$ ならば　$n\geqq2^4\cdot3^2=144>100$　なので不適．
　$p=2$，$q=5$ のとき　$(a,\ b)=(4,\ 1)$ ならば　$n=2^4\cdot5=80$　適する
　　$(a,\ b)=(4,\ 2$ 以上$)$ ならば　$n\geqq2^4\cdot5^2=400>100$　なので不適．
　$p=2$，$q\geqq7$ のとき　$n\geqq2^4\cdot7^1=112>100$　なので不適．
　$p\geqq3$，$q\geqq5$ のとき　$n\geqq3^4\cdot5^1=405>100$　なので不適．

(ウ)　3 個のとき：$n=p^a\cdot q^b\cdot r^c$（p，q，r は素数，$p<q<r$，a，b，c は 1 以上の整数）
正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)$ 個であり，$(a+1)(b+1)(c+1)>9$．これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組を a が小さいものから順に吟味する．

①　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1)$ のとき
　$(p,\ q,\ r)=(2,\ 3,\ 5)$　$n=2\cdot3^2\cdot5=90$　適する．
　$(p,\ q,\ r)=(2$ 以上，3 以上，7 以上$)$　$n\geqq2\cdot3^2\cdot7\geqq126>100$　なので不適．
②　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 2$ 以上$)$ のとき　不適
③　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 2$ 以上$)$ のとき　不適
④　$(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 1)$ のとき
　$(p,\ q,\ r)=(2,\ 3,\ 5)$

【補足】
問題文の (1) について，出題者が想定しているであろう解答を書いた．

実際には，

$\overline{A}\cup B=V\ \Longrightarrow\ \overline{A}\subset V$
$\overline{A}\cap\overline{B}=W\ \Longrightarrow\ \overline{A}\supset W$
したがって，$W\subset\overline{A}\subset V$
となるのだが，これは，集合 W と V の定義に矛盾する．

(1)　U の要素のうち，100 との最大公約数が 1 より大きいもの全体からなる集合を V，
V の要素のうち偶数個の正の約数をもつものの集合を W とする．

の誤植であると考えられる．混乱した受験生もいただろう．

3

次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみ解答欄に記入せよ．

(1)　$3x+7y=2019$ を満たす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ は全部で何個あるか求めよ．

(2)　2つの3次関数

$f(x)=x^3+3x^2-1$ と $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ がある．

方程式 $f(x)=0$ の解を α，β，γ とするとき，方程式 $g(x)=0$ の解は α^2，β^2，γ^2 である．a，b，c の値を求めよ．

(3)　1つのサイコロを投げることをくり返し，出た目の和が5以上になったら終わることにする．

(3−1)　1回投げて終わる確率を求めよ．

(3−2)　2回投げて終わる確率を求めよ．

(3−3)　終わるまでに投げる回数の期待値（平均値）を求めよ．

解答　(1)　96個　　(2)　$a=-9$，$b=6$，$c=-1$

(3)　(3−1)　$\dfrac{1}{3}$　　(3−2)　$\dfrac{1}{2}$　　(3−3)　$\dfrac{2401}{1296}$

(1)　$3x+7y=2019$　…①

$$3\cdot(-2)+7\cdot1=1$$

であるから，両辺を2019倍して

$$3\cdot(-4038)+7\cdot2019=2019 \quad \cdots②$$

①−② から

$$3(x+4038)+7(y-2019)=0$$

3と7は互いに素なので，

$$\frac{x+4038}{7}=-\frac{y-2019}{3}=k\ (k：整数)$$

とおくことができる．このとき，

$$x=7k-4038,\quad y=-3k+2019$$

であり，$x>0$，$y>0$ から

$$\frac{4038}{7}<k<\frac{2019}{3}$$

これを満たす整数 k は $577\leqq k\leqq 673$ であり，96個．

【別解】

① を変形すると，

$$7y=3(673-x)$$

$$\iff \frac{y}{3}=\frac{673-x}{7}$$

と変形できるので，上の解答と同様に，

$$x=673-7k,\quad y=3k$$

と一般解が求まる．

(2)　$f(x)=x^3+3x^2-1$，$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(x)=0$ の3つの解を α，β，γ とおくとき，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=-3,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\quad \alpha\beta\gamma=1$$

これを用いると，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=9$$

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=6$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=1$$

したがって，

$$g(x)=(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)$$
$$=x^3-9x^2+6x-1$$

よって，$a=-9$，$b=6$，$c=-1$

【別解】

$f(x)=0$ より

$$x^3=-3x^2+1$$

これを両辺平方すると

$$x^6=(-3x^2+1)^2$$

$$\iff x^6-9x^4+6x^2-1=0$$

ここで，$x^2=X$ とおくと，

$$X^3-9X^2+6X-1=0$$

これは，$X=\alpha^2$，β^2，γ^2 を解に持つ方程式である．

(3)

(3−1)　1回投げて終わるのは，サイコロの目が5または6となるときであるから

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(3−2)　2回投げて終わるのは，

1回目の目が1のとき，2回目の目は4，5，6のいずれかであるから $\dfrac{3}{6}$

1回目の目が2のとき，2回目の目は3，4，5，6のいずれかであるから $\dfrac{4}{6}$

1回目の目が3のとき，2回目の目は2，3，4，5，6のいずれかであるから $\dfrac{5}{6}$

1回目の目が4のとき，2回目の目は何でもよいので1

したがって，求める確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times1=\frac{1}{2}$$

(3−3)

5回投げて終わるのは，

4回連続で1の目が出るので，　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^4=\dfrac{1}{6^4}$

4回投げて終わるのは，

3回連続で1の目が出て，4回目に2以上の目が出る場合と，

3回の和が4となり，4回目は何でもよいという場合がある．

したがって，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}+{}_3C_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot1=\frac{23}{6^4}$$

3回投げて終わるのは，余事象を考えれば，

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6^4}+\frac{23}{6^4}\right)=\frac{4}{3^3}$$

したがって，求める期待値 E は，

$$E=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{4}{3^3}+4\cdot\frac{23}{6^4}+5\cdot\frac{1}{6^4}=\frac{2401}{1296}$$

【別解】

出た目の和が n となるまでに投げる回数の期待値を $E(n)$ とおく．$E(1)=1$ である．

和が2となるまでに投げる回数は，以下の2通りである．

（ア）　一回目に1が出るとき，2回目以降の回数の期待値は $E(1)$ であり，

$$\frac{1}{6}\times(1+E(1))$$

（イ）　1回目に2以上の目が出れば，1回で終わるので，

$$\frac{5}{6}\times1$$

したがって，$E(2)=\dfrac{1}{6}\{1+E(1)\}+\dfrac{5}{6}\cdot1=1+\dfrac{1}{6}E(1)$

和が3となるまでに投げる回数は，以下の3通りである．

（ア）　一回目に1が出るとき，2回目以降の回数の期待値は $E(2)$ であり，

$$\frac{1}{6}\times(1+E(2))$$

（イ）　一回目に2が出るとき，2回目以降の回数の期待値は $E(1)$ であり，

$$\frac{1}{6}\times(1+E(1))$$

（ウ）　1回目に3以上の目が出れば，1回で終わるので，

$$\frac{4}{6}\times1$$

したがって，$E(3)=\dfrac{1}{6}\{1+E(1)\}+\dfrac{1}{6}\{1+E(2)\}+\dfrac{5}{6}\cdot1=1+\dfrac{1}{6}\{E(1)+E(2)\}$

同様に考えると，$n\leqq6$ のとき，

$$E(n+1)=1+\frac{1}{6}\{E(1)+E(2)+\cdots E(n)\}$$

が得られる．いま，$T(n)=E(1)+E(2)+\cdots+E(n)$ とおくとき，

$$E(n+1)=1+\frac{1}{6}T(n)$$

$$\iff T(n)=6E(n+1)-6$$

したがって，$n\geqq2$ として

$$T(n)-T(n-1)=6\{E(n+1)-E(n)\}$$

$T(n)-T(n-1)=E(n)$ であるから，

$$E(n)=6E(n+1)-6E(n)$$

$$\iff E(n+1)=\frac{7}{6}E(n)$$

これは，$n=1$ のときも成り立つので，$E(n)=\left(\dfrac{7}{6}\right)^{n-1}$

ゆえに求める期待値は $E(5)=\left(\dfrac{7}{6}\right)^4=\dfrac{2401}{1296}$．

4

次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみ解答欄に記入せよ．

(1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

のとき，$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ を求めよ．

(2) 曲線 $|\log_3 x|+|\log_3 y|=2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) $\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ $(-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$

を x 軸のまわり回転させてできる回転体の体積を求めよ．

解答 (1) $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{160}{9}\log 3$ (3) $\dfrac{8}{3}\pi$

(1) $f'(x)=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}=-\dfrac{1}{1+\sin x}$ より，

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3} \quad \cdots\text{答}$$

(2) $|\log_3 x|+|\log_3 y|=2$ …① とする．

(i) $x\geqq 1$，$y\geqq 1$ のとき，

① $\iff \log_3 x+\log_3 y=2 \iff \log_3 xy=2 \iff y=\dfrac{9}{x}$

(ii) $x\geqq 1$，$0<y\leqq 1$ のとき，

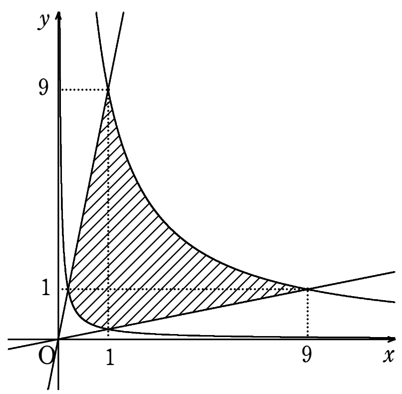
① $\iff \log_3 x-\log_3 y=2 \iff \log_3\dfrac{x}{y}=2 \iff y=\dfrac{1}{9}x$

(iii) $0<x\leqq 1$，$y\geqq 1$ のとき，

① $\iff -\log_3 x+\log_3 y=2 \iff \log_3\dfrac{y}{x}=2 \iff y=9x$

(iv) $0<x\leqq 1$，$0<y\leqq 1$ のとき，

① $\iff -\log_3 x-\log_3 y=2 \iff \log_3 xy=-2 \iff y=\dfrac{1}{9x}$



したがって，求める面積を S とすると，

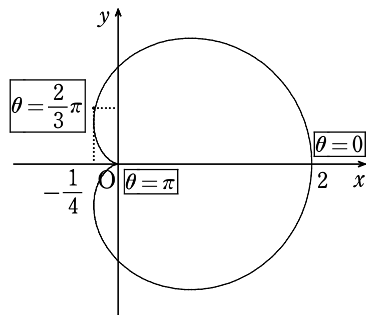
$$S=\int_{\frac{1}{9}}^{1}\left(9x-\frac{1}{9x}\right)dx+\int_{1}^{9}\left(\frac{9}{x}-\frac{1}{9}x\right)dx=\frac{160}{9}\log 3 \quad \cdots\text{答}$$

【参考】図形は原点を中心に相似拡大してえられる 2 つの図形から求めることもできる．

(3) 与えられた条件から描かれる図形はカージオイドである．

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta(1+2\cos\theta),\quad \frac{dy}{d\theta}=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$$

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$		$-$	0	$+$	
x	2	←	$\frac{3}{4}$	←	$-\frac{3}{4}$	→	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	↑		↓		↓	0



$y\geqq 0$ の部分を x 軸まわりに回転すればよいので，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の部分を y_+ と表し，

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を y_- と表すと，

$$V=\pi\int_{-\frac{1}{4}}^{2}{y_+}^2dx-\pi\int_{-\frac{1}{4}}^{0}{y_-}^2dx=\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta-\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}y^2dx$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta=\pi\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot\sin\theta(1+2\cos\theta)d\theta$$

ここで，$\cos\theta=t$ とおくことにより，

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)dt$$

$$=2\pi\int_0^1(1+4t^2-5t^4)dt=\frac{8}{3}\pi$$

【補足】極方程式の利用．

カージオイド曲線は極方程式により，$r=1+\cos\theta$ と表すことができる．

このとき，x 軸まわりに回転した立体の体積は，

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta\,d\theta$$

として求めることができる．これを利用してもよい．

$$V=\int_0^{\pi}\frac{2}{3}\pi(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1}(1+t)^3dt=\frac{2}{3}\pi\left[\frac{1}{4}(1+t)^4\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}\pi$$