1 次の問い(問1～3)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

問1 不等式

$$1 \leqq \log_e n \leqq 12$$

を満たす自然数 n の桁数 p は

$$\boxed{1} \leqq p \leqq \boxed{2}$$

である．ただし，$0.4342 < \log_{10} e < 0.4343$ である．

解答 $1 \leqq p \leqq 6$

【解説】

$$1 \leqq \log_e n \leqq 12$$

$$\iff e \leqq n \leqq e^{12} \quad \cdots ①$$

と変形できるので，$0.4342 < \log_{10} e < 0.4343$ であるから

$$10^{0.4342} < e < 10^{0.4343}$$

であり，e の整数部分は1桁．

また，$5.2104 < \log_{10} e^{12} < 5.2116$ であるから

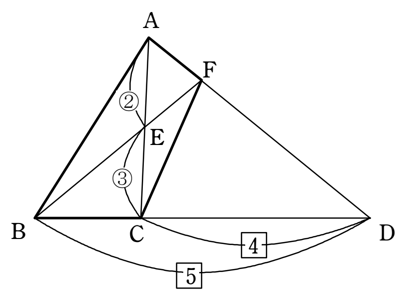
$$10^{5.2104} < e^{12} < 10^{5.2116}$$

であり，e^{12} の整数部分は6桁．

したがって，① を満たす自然数 n は1桁～6桁であり，$1 \leqq p \leqq 6$．

問2 三角形ABCにおいて，辺BCを5:4に外分する点をD，辺CAを3:2に内分する点をE，線分BEの延長と線分ADとの交点をFとする．このとき，四角形ABCFの面積は三角形ABCの面積の $\dfrac{\boxed{3}\boxed{4}}{\boxed{5}\boxed{6}}$ 倍である．

解答 $\dfrac{25}{17}$



△ACDと直線BFを用いるとメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} \cdot \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}} \cdot \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}} = 1$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}} = 1$$

よって，DF:FA=15:2である．また，面積の比を考えると，

$$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{ABD} \times \frac{1}{5}$$

$$\triangle \mathrm{CDF} = \triangle \mathrm{ABD} \times \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DA}} \times \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DC}} = \triangle \mathrm{ABD} \times \frac{15}{17} \times \frac{4}{5} = \triangle \mathrm{ABD} \times \frac{12}{17}$$

であるから，四角形ABCFの面積を S とすると

$$S = \triangle \mathrm{ABD} \times \left(1 - \frac{12}{17}\right) = \triangle \mathrm{ABC} \times 5 \times \frac{5}{17} = \triangle \mathrm{ABC} \times \frac{25}{17}$$

【別解】

DF:FA=15:2である．さらに△BDFと直線ACを用いるとメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AF}} \cdot \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{EB}} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{EB}} = 1$$

よって，FE:EB=8:17である．すなわち，

△ABC:△ACF=15:8

したがって，

$$S = \frac{17+8}{17} \times \triangle \mathrm{ABC} = \frac{25}{17} \times \triangle \mathrm{ABC}$$

問3 関数

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

の区間 $x \leqq \dfrac{1+3\sqrt{3}}{3}$ における最大値は

$$\frac{\boxed{7} + \boxed{8}\boxed{9}\sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{11}\boxed{12}}$$

である．

解答 $\dfrac{7+14\sqrt{7}}{27}$

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ より，$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$ である．

$f'(x) = 0$ を満たす解は，$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ であることから，増減表は次のようになる．

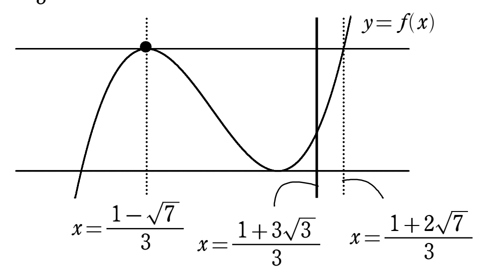
x	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		↘		↗	

ここで，$f(x) = f\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ を満たす x を求めると，

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$\iff \left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)^2 \left(x - \frac{1+2\sqrt{7}}{3}\right) = 0$$

また，$\dfrac{1+3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1+\sqrt{27}}{3} < \dfrac{1+\sqrt{28}}{3} = \dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}$ であるから，$f(x)$ を最大とする x の値は $x = \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$ である．



また，$f(x)$ を $\dfrac{1}{3}f'(x)$ で割るとき，

$$f(x) = \frac{1}{3}f'(x)\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{14}{9}x + \frac{7}{9}$$

となるので，$f'\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right) = 0$ であるから

$$f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) = -\frac{14}{9} \cdot \frac{1-\sqrt{7}}{3} + \frac{7}{9} = \frac{7+14\sqrt{7}}{27}$$

$\boxed{2}$ 次の文章を読み，下の問い（問 1 ～ 3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，不等式

$$4\sin^2\theta + 2\cos 2\theta \cos\theta + \cos\theta - 3 \geqq 0 \qquad (1)$$

を考える．

問 1　$\cos\theta = x$ とおき，$|x| \leqq 1$ の範囲で式 (1) の左辺を x の関数 $f(x)$ とおくと

$$f(x) = \boxed{13}x^3 - \boxed{14}x^2 - \boxed{15}x + \boxed{16}$$

であり，因数分解すると

$$f(x) = \left(x - \boxed{17}\right)\left(\boxed{18}x + \boxed{19}\right)\left(\boxed{20}x - \boxed{21}\right)$$

である．

問 2　不等式 (1) の解は

$$\frac{\boxed{22}}{\boxed{23}}\pi \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{24}}{\boxed{25}}\pi,\quad \frac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\pi \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{28}}{\boxed{29}}\pi,\quad \theta = \boxed{30}$$

(ただし，$\boxed{22} < \boxed{26}$) である．

問 3　問 1 の $f(x)$ について，$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{31}\,\boxed{32}}{\boxed{33}\,\boxed{34}}$$

である．

解答　問 1　$f(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$，$f(x) = (x-1)(2x+1)(2x-1)$

問 2　$\frac{1}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$，$\theta = 0$

問 3　$\frac{37}{48}$

問 1　(1) を変形すると，

$$4(1-\cos^2\theta) + 2(2\cos^2\theta - 1)\cos\theta + \cos\theta - 3 \geqq 0$$

ここで，$\cos\theta = x$ とおくと，左辺は

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(1-x^2) + 2(2x^2-1)x + x - 3 \\ &= 4x^3 - 4x^2 - x + 1 \\ &= (x-1)(2x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

と変形できる．

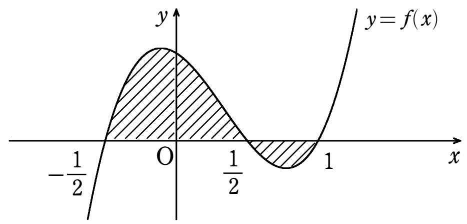
問 2　$f(x) \geqq 0$ を解くと，

$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2},\quad 1 \leqq x$$

である．したがって，$x = \cos\theta$ として $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと

$$\theta = 0,\quad \frac{1}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\quad \frac{4}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi$$

問 3　$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $x = \pm\frac{1}{2}$，1 であり，図は以下のようになる．



したがって求める面積は

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4x^3 - 4x^2 - x + 1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-4x^4 + 4x^2 + x - 1)dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (-4x^2 + 1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-4x^3 + 4x^2 + x - 1)dx$$

$$= 2\left[-\frac{4}{3}x^3 + x\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{37}{48}$$

$\boxed{3}$ 次の文章を読み，下の問い（問 1 ～ 3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

z を 1 でない複素数，n を 2 以上の整数として，

$$S_n=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} \tag{2}$$

とおく．以下では i を虚数単位をする．

問 1　$z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき

$$S_8=\frac{\boxed{35}}{\boxed{36}}+\frac{\boxed{37}\sqrt{\boxed{38}}}{\boxed{39}}i$$

である．

問 2　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<2\pi)$ とおく．式 (2) の両辺の虚部どうしが等しいことから

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin k\theta=\frac{-\sin n\theta+\boxed{40}\sin(n-1)\theta+\boxed{41}\sin\theta}{\boxed{42}-\boxed{43}\cos\theta}$$

となる．

問 3　問 2 の結果において $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\boxed{44}+\boxed{45}\cos\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$$

となる．これより

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\boxed{46}}{\pi}$$

である．

解答　問 1　$\dfrac{3}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}}{2}i$　　問 2　$\dfrac{-\sin n\theta+1\cdot\sin(n-1)\theta+1\cdot\sin\theta}{2-2\cos\theta}$

問 3　$\dfrac{1+1\cdot\cos\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$，$\dfrac{2}{\pi}$

問 1　$z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，$z=\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi$ であるから，$z^6=1$．

このとき，$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$ である．

$$\begin{aligned}S_8&=(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5)+z^6+z^7\\&=1+z\\&=\frac{3}{2}+\frac{-\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

問 2

$$S_n=1+z+z^2+\cdots z^{n-1}=\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{(z^n-1)(\bar{z}-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

$$=\frac{z^n\bar{z}-z^n-\bar{z}+1}{z\bar{z}-z-\bar{z}+1}\quad\cdots①$$

ここで，

$$(\text{分母})=|z|^2+1-(z+\bar{z})=2-2\cos\theta$$

である．また，分子の虚部だけ取り出して計算すると，

$$\mathrm{Im}(z^n)=\sin n\theta,\ \mathrm{Im}(\bar{z})=\sin(-\theta),\ \mathrm{Im}(z^n\bar{z})=\sin(n\theta-\theta)$$

であるから

$$\sin(n-1)\theta-\sin n\theta-\sin(-\theta)$$

したがって，① の虚部は

$$\frac{-\sin n\theta+\sin(n-1)\theta+\sin\theta}{2-2\cos\theta}.$$

また，$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$ の虚部は

$$0+\sin\theta+\sin2\theta+\cdots+\sin(n-1)\theta=\sum_{k=0}^{n-1}\sin k\theta$$

である．

問 3

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{-\sin\pi+\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{n}\right)+\sin\dfrac{\pi}{n}}{2-2\cos\dfrac{\pi}{n}}=\frac{2\sin\dfrac{\pi}{n}}{2-2\cos\dfrac{\pi}{n}}$$

ここで，$\dfrac{\pi}{n}=\alpha$ と表すと，

$$\frac{2\sin\alpha}{2-2\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

したがって，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$$

これを用いて，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=1\cdot\frac{1}{\pi}\cdot(1+1)=\frac{2}{\pi}$$

【参考】区分求積法により，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin(\pi x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{\pi}$$

4　次の文章を読み，下の問い（問 1 ～ 3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

5 個の黒石と 5 個の白石がある．これを無作為に横一列に並べる．

問 1　黒石が 5 個連続して並ぶ確率は $\dfrac{\boxed{47}}{\boxed{48}\boxed{49}}$ である．

問 2　黒石が 4 個連続して並ぶ確率は $\dfrac{\boxed{50}}{\boxed{51}\boxed{52}}$ である．ただし，黒石が 5 個連続した並び方は含めない．

問 3　黒石と白石のいずれか一方または両方が 4 個連続して並ぶ確率は $\dfrac{\boxed{53}}{\boxed{54}\boxed{55}}$ である．ただし，同じ色の石が 5 個連続した並び方は含めない．

解答　問 1　$\dfrac{1}{42}$　　問 2　$\dfrac{5}{42}$　　問 3　$\dfrac{4}{21}$

黒石 5 個と白石 5 個を 1 列に並べるとき，その場合の数は

$$\frac{10!}{5!\cdot5!}=252\ (\text{通り})$$

これらの場合は同様に確からしい．以下，黒石を B，白石を W と表すことにする．

問 1　黒石 5 つを一つにまとめて並べればよい．すなわち，

$\boxed{\text{BBBBB}}$，W，W，W，W，W

の並べ方を考えて 6 通り．ゆえに求める確率は，

$$\frac{6}{252}=\frac{1}{42}$$

問 2　黒石が 4 個連続して並ぶのは，

$\boxed{\text{BBBB}}$，B，W，W，W，W，W

の並べ方を考えればよい．ただし，$\boxed{\text{BBBB}}$ と B は隣り合わないので，まず白石 5 個を 1 列に並べて，その隙間と両端の 6 箇所に $\boxed{\text{BBBB}}$ と B を順番に入れればよい．

したがって，

$${}_6\mathrm{P}_2=30\ (\text{通り})$$

であり，求める確率は

$$\frac{15}{252}=\frac{5}{42}$$

【別解】

$\boxed{\text{BBBB}}$，B，W，W，W，W，W の並べ方を考えると

$$\frac{7!}{5!}=42\ (\text{通り})$$

このうち，$\boxed{\text{BBBB}}$，B が隣り合うのは，その入れ替えも意識して問 1 から $6\times2=12$ 通りある．したがって

$$\frac{42-12}{252}=\frac{5}{42}$$

問 3　黒石が 4 個連続で並ぶ確率は $\dfrac{5}{42}$ であり，同様に白石が 4 個連続で並ぶ確率も $\dfrac{5}{42}$.

ただし，この中には，

黒石も白石も共に 4 個連続で並ぶ場合　…(ア)

が重複し，さらに

黒石は 4 個連続で並ぶが白石が 5 個連続で並ぶ場合　…(イ)

白石は 4 個連続で並ぶが黒石が 5 個連続で並ぶ場合　…(ウ)

が含まれているので，これらを除けばよい．

(ア)　$\boxed{\text{BBBB}}$ と B，$\boxed{\text{WWWW}}$ と W が隣り合わないように並べるので，

$4\times2\times1\times1=8$ 通り

(イ)　$\boxed{\text{BBBB}}$ と B と $\boxed{\text{WWWWW}}$ を $\boxed{\text{BBBB}}$ と B が隣り合わないように並べるので

$2\times1\times1=2$ 通り

(ウ)　(イ) と同様に 2 通り．

したがって

$$\frac{5}{42}+\frac{5}{42}-\frac{8+2+2}{252}=\frac{4}{21}$$