[I] a を $a \neq 0,\ -1$ を満たす実数とする．O を原点とする xy 平面上において次の 2 つの曲線を考える：

$$C_1 : x^2-y^2=1,\quad C_2 : y=ax^2-\frac{3}{2a+2}$$

以下の各問いの答えのみを解答欄に記入せよ．

問 1　$a=1$ のとき，C_1 と C_2 の共有点の座標をすべて求めよ．

問 2　C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わるための a に対する必要十分条件を求めよ．

問 3　C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わるとき，それら 4 点すべてを通る円の中心の座標を a を用いて表せ．また，その円の半径を r とするとき，以下の空欄に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ．

$$r=\sqrt{\frac{-a^3-a^2+\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}}{a^{\boxed{\text{ウ}}}(a+\boxed{\text{エ}})}}$$

解答　問 1　$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

問 2　$\frac{-2-\sqrt{3}}{2}<a<-1,\ \frac{-2+\sqrt{3}}{2}<a<0,\ 0<a<1$

問 3　中心 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$，半径 $\sqrt{\frac{-a^3-a^2+4a+1}{a^2(a+1)}}$

$$C_1 : x^2-y^2=1 \quad\cdots① \qquad C_2 : y=ax^2-\frac{3}{2a+2} \quad\cdots②$$

問 1

$a=1$ のとき，② は

$$y=x^2-\frac{3}{4} \iff x^2=y+\frac{3}{4} \quad\cdots③$$

①，③ の共有点の座標は，

$$\left(y+\frac{3}{4}\right)-y^2=1 \iff (2y-1)^2=0 \iff y=\frac{1}{2}$$

これを ① に代入して

$$x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1 \iff x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

したがって，共有点の座標は $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ である．

問 2

$a \neq 0,\ -1$ に注意して

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ y=ax^2-\dfrac{3}{2a+2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ a(x^2-y^2)+y=a\cdot 1+\left(ax^2-\dfrac{1}{2a+2}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2=y^2+1 & \cdots④ \\ 2a(a+1)y^2-2(a+1)y+2a^2+2a-3=0 & \cdots⑤ \end{cases}$$

⑤ が異なる 2 つの実数解をもつとき，④ より，連立方程式は相異なる 4 つの実数解 $(x,\ y)$ をもつので，C_1，C_2 は相異なる 4 点で交わる．⑤ の判別式を D として，

$$D/4=(a+1)^2-2a(a+1)(2a^2+2a-3)>0$$

$$\iff (a+1)\{(a+1)-2a(2a^2+2a-3)\}>0$$

$$\iff (a+1)(-4a^3-4a^2+7a+1)>0$$

$$\iff (a+1)(a-1)(4a^2+8a+1)<0$$

$$\iff (a+1)(a-1)\left(a-\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(a-\frac{-2-\sqrt{3}}{2}\right)<0$$

したがって，$a \neq 0,\ -1$ と合わせて

$$\frac{-2-\sqrt{3}}{2}<a<-1,\ \frac{-2+\sqrt{3}}{2}<a<0,\ 0<a<1$$

問 3

C_1，C_2 の全ての共有点を通る図形を実数 k を用いて

$$(x^2-y^2-1)+k\left(ax^2-y-\frac{3}{2a+2}\right)=0 \quad\cdots(*)$$

と表すことができる．$(*)$ は $k=-\frac{2}{a}$ をのとき x^2，y^2 の係数が一致するので円を表す．4 つの共有点を通る円はただ一つ存在するので，これが求める円の方程式となる．したがって，

$$(x^2-y^2-1)-\frac{2}{a}\left(ax^2-y-\frac{3}{2a+2}\right)=0$$

$$\iff -x^2-y^2+\frac{2}{a}y-1+\frac{3}{a(a+1)}=0$$

$$\iff x^2+y^2-\frac{2}{a}y+\frac{a^2+a-3}{a(a+1)}=0$$

$$\iff x^2+\left(y-\frac{1}{a}\right)^2=\frac{-a^3-a^2+4a+1}{a^2(a+1)}$$

よって，中心 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$，半径 $r=\sqrt{\frac{-a^3-a^2+4a+1}{a^2(a+1)}}$ の円である．

[II] 空間において1点Oをとり，相異なる4点P，A，B，Cを頂点とする四面体PABCについて考える．四面体PABCは点Oを中心とする半径が1の球に内接しており，三角形ABCは1辺の長さがlの正三角形であると仮定する．

問1 lの取り得る値の範囲を答えよ．答のみでよい．

問2 $s=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$t=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$とおき，点Pから三角形ABCを含む平面に垂線PHを下ろす．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$を$l$，$s$，$t$を用いて$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の1次結合で表せ．

問3 問2においてlを固定し，点Pが$2s-t=l^2$を満たしながら点Oを中心とする半径1の球面上を動くとき，四面体PABCの体積の最大値$V(l)$を求めよ．

解答 問1 $0<l\leqq\sqrt{3}$ 問2 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{4s-2t}{3l^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4t-2s}{3l^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

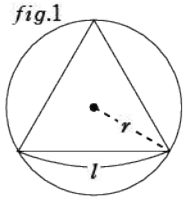
問3 $V(l)=\dfrac{\sqrt{3}}{12}l^2\left(\sqrt{1-\dfrac{l^2}{3}}+\sqrt{1-\dfrac{l^2}{12}}\right)$

問1

球面を，3点A，B，Cを含む平面で切るとき，その断面は，半径が1以下の円である．この断面の半径をrとおくとき，$0<r\leqq1$であるから，正弦定理より，

$$\frac{l}{\sin\frac{\pi}{3}}=2r \iff l=\sqrt{3}\,r$$

fig.1



したがって，

$$0<l\leqq\sqrt{3}$$

問2

点Hが平面ABC上にあるとき，実数m，nを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表すことができる．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

ここで，PH⊥(平面ABC)なので$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$を満たせばよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\iff m|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+n\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\iff m\cdot l^2+n\cdot\frac{l^2}{2}-s=0 \quad \cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\iff m\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+n|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\iff m\cdot\frac{l^2}{2}+n\cdot l^2-t=0 \quad \cdots②$$

①，②より，$m=\dfrac{4s-2t}{3l^2}$，$n=\dfrac{4t-2s}{3l^2}$であり，

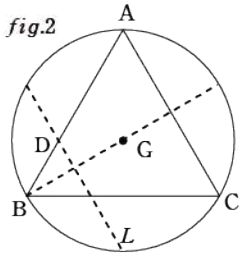
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{4s-2t}{3l^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4t-2s}{3l^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

問3

$2s-t=l^2$のとき，問2の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{2l^2}{3l^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4t-(l^2+t)}{3l^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{t}{l^2}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

fig.2



tが変化するとき，点Hは，ABを2:1に内分する点をDとおくとき，点Dを通り，辺ACに平行な直線L上に存在する．四面体PABCの体積が最大となるのは，PHの長さ(三角形ABCを底面と見たときの高さ)が最大となるときである．これは，三角形ABCの重心をGとするとき，fig.2のように直線BGと直線Lとの交点に点Hがあるときである．このとき，3点P，B，Gを含む平面を切り出すとfig.4のようになる．

fig.3

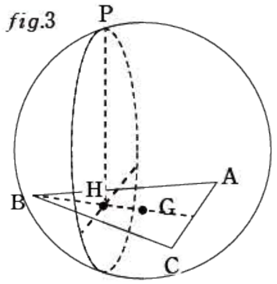
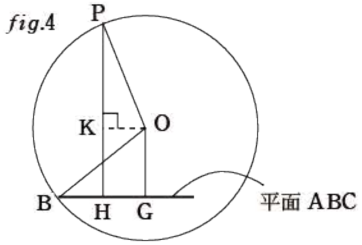


fig.4



このとき，$\mathrm{BG}=\dfrac{l}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{GH}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}l$であるから，

$$\mathrm{OG}=\sqrt{1^2-\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2},\quad \mathrm{PK}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}l\right)^2}$$

であり，体積の最大値$V(l)$は

$$V(l)=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})\times\mathrm{PH}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\cdot\left(\sqrt{1-\frac{l^2}{3}}+\sqrt{1-\frac{l^2}{12}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}l^2\left(\sqrt{1-\frac{l^2}{3}}+\sqrt{1-\frac{l^2}{12}}\right)$$

[III] $f(x)=\log(1+x^2)$ $(x>0)$ とする．また，実数 a，h は

$$0<a<1,\ 0<h<1,\ 0<a+h<1$$

を満たすとする．以下の各問いに答えよ．

問1　k を正の実数とする．このとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．

$$x-\frac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)\leqq x-\frac{1}{k+1}\frac{x^2}{2}\quad(0\leqq x\leqq k)$$

問2　各 a，h に対して，以下の等式を満たす c $(a<c<a+h)$ がただ1つ存在することを示せ．

$$f(a+h)=f(a)+f'(c)h$$

また，d を以下のように定めたとき，c を d を用いて表せ．

$$d=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

問3　問2において a を固定し，c を h の関数と考えて $c(h)$ と書くことにする．また，$\theta(h)$ を以下のように定める．

$$\theta(h)=\frac{c(h)-a}{h}$$

このとき，極限 $\lim_{h\to+0}\theta(h)$ を求めよ．ただし，記号 $\lim_{h\to+0}$ は $h>0$ の範囲で h を0に限りなく近づけたときの極限を意味する．

解答　問1　証明略　　問2　証明略，$c=\dfrac{1-\sqrt{1-d^2}}{d}$　　問3　$\dfrac{1}{2}$

問1

$F(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ $(x\geqq0)$ とおく．

$$F'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}\geqq0$$

よって，$F(x)$ は単調増加であるから $F(x)\geqq F(0)=0$

すなわち，$x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)$ が成り立つ．

さらに，$G(x)=\left(x-\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{x^2}{2}\right)-\log(1+x)$ $(x\geqq0)$ とおく．

$$G'(x)=1-\frac{x}{k+1}-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}-\frac{x}{k+1}=x\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+k}\right)$$

ここで，$0\leqq x\leqq k$ において，$\dfrac{1}{1+x}\geqq\dfrac{1}{1+k}$ であるから $G'(x)\geqq0$

よって，$G(x)$ は単調増加であるから $G(x)\geqq G(0)=0$

すなわち $\log(1+x)\leqq x-\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つ．　　　　（証明終わり）

問2

$f(x)=\log(1+x^2)$ は全ての実数 x に関して連続かつ微分可能である．

区間 $a\leqq x\leqq a+h$ において平均値の定理より，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=f'(c)\quad\cdots(*)$$

を満たす実数 c が $a<c<a+h$ に少なくとも1つ存在する．

さらに，$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ であり，$0<a$，$a+h<1$ のもとで考えれば，$a<x<a+h$ において $f''(x)>0$ である．すなわち関数 $f'(x)$ は単調増加である．

したがって，$(*)$ を満たす実数 c は1つしか存在しない．

$$(*)\iff f(a+h)-f(a)=f'(c)\cdot h$$
$$\iff f(a+h)=f(a)+f'(c)\cdot h$$

であり，これを満たす c $(a<c<a+h)$ はただ1つ存在する．　　　　（証明終わり）

$d=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ とおくとき，$(*)$ より $d=f'(c)$ であるから，

$$d=\frac{2c}{1+c^2}\iff dc^2-2c+d=0$$

$$\iff c=\frac{1\pm\sqrt{1-d^2}}{d}\quad\cdots①$$

ここで，c は $0<c<1$ を満たす実数であり，相加平均と相乗平均の関係から

$$d=\frac{2}{c+\dfrac{1}{c}}\leqq\frac{2}{2\sqrt{c\cdot\dfrac{1}{c}}}=1$$

となるが，$c\neq1$ であるから等号が成り立たず $0<d<1$ であることがわかる．① の解のうち $\dfrac{1+\sqrt{1-d^2}}{d}$ は d について単調減少であり，$0<d<1$ から

$$\frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d}>\frac{1+\sqrt{1-1^2}}{1}=1$$

となり，$0<c<1$ を満たさない．したがって，$d=f'(c)$ を満たす c を d を用いて表すと，

$$c=\frac{1-\sqrt{1-d^2}}{d}$$

問3

$$\theta(h)=\frac{c(h)-a}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{1-\sqrt{1-d^2}}{d}-a\right)=\frac{1-ad-\sqrt{1-d^2}}{hd}$$
$$=\frac{(1-ad)^2-(1-d^2)}{hd}\cdot\frac{1}{1-ad+\sqrt{1-d^2}}$$
$$=\frac{(1+a^2)d-2a}{h}\cdot\frac{1}{1-ad+\sqrt{1-d^2}}$$
$$=(1+a^2)\cdot\frac{d-\dfrac{2a}{1+a^2}}{h}\cdot\frac{1}{1-ad+\sqrt{1-d^2}}$$
$$=(1+a^2)\cdot\frac{d-f'(a)}{h}\cdot\frac{1}{1-ad+\sqrt{1-d^2}}$$

以下，次の2つの極限をそれぞれ求める．

$$A=\lim_{h\to+0}\frac{d-f'(a)}{h},\qquad B=\lim_{h\to+0}\frac{1}{1-ad+\sqrt{1-d^2}}$$

$a<c(h)<a+h$ より，はさみうちの原理から $\lim_{h\to+0}c(h)=a$ であり，

$d=f'(c)=\dfrac{2c}{1+c^2}$ は連続関数であるから，$\lim_{h\to+0}d=f'(a)=\dfrac{2a}{1+a^2}$

したがって，

$$B=\frac{1}{1-af'(a)+\sqrt{1-\{f'(a)\}^2}}=\frac{1+a^2}{2(1-a^2)}$$

次に A について，

$$\frac{d-f'(a)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right\}$$
$$=\frac{1}{h^2}\left[\log\{1+(a+h)^2\}-\log(1+a^2)-\frac{2ah}{1+a^2}\right]$$
$$=\frac{1}{h^2}\left[\log\left\{1+\frac{(2a+h)h}{1+a^2}\right\}-\frac{2ah}{1+a^2}\right]$$

更に，問1で示した不等式で $x=k=\dfrac{(2a+h)h}{1+a^2}$ として，

$$\frac{(2a+h)h}{1+a^2}-\frac{(2a+h)^2h^2}{2(1+a^2)^2}\leqq\log\left\{1+\frac{(2a+h)h}{1+a^2}\right\}\leqq\frac{(2a+h)h}{1+a^2}-\frac{(2a+h)^2h^2}{2(k+1)(1+a^2)^2}$$

$$\frac{h^2}{1+a^2}-\frac{(2a+h)^2h^2}{2(1+a^2)^2}\leqq\log\left\{1+\frac{(2a+h)h}{1+a^2}\right\}-\frac{2ah}{1+a^2}\leqq\frac{h^2}{1+a^2}-\frac{(2a+h)^2h^2}{2(k+1)(1+a^2)^2}$$

$$\frac{1}{1+a^2}-\frac{(2a+h)^2}{2(1+a^2)^2}\leqq\frac{d-f'(a)}{h}\leqq\frac{1}{1+a^2}-\frac{(2a+h)^2}{2(k+1)(1+a^2)^2}$$

$h\longrightarrow0+0$ のとき $k\longrightarrow+0$ であるから，はさみうちの原理を用いて，

$$A=\frac{1}{1+a^2}-\frac{(2a)^2}{2(1+a^2)^2}=\frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}$$

以上より，

$$\lim_{h\to0+0}\theta(h)=(1+a^2)AB=\frac{1}{2}$$

2019/1/31 更新

[Ⅳ] 関数 $f(x)$ は 2 回微分可能で，その 2 次までの導関数 $f'(x)$，$f''(x)$ はいずれも連続とし，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．xy 平面上の曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線上に点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ を $\mathrm{PQ}=1$，$b<f(t)$ を満たすようにとるとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めよ．答のみでよい．

問 2　a，b を t の式で表せ．答のみでよい．

問 3　問 2 の a，b をそれぞれ $a(t)$，$b(t)$ と表すとき，$b'(t)=f'(t)a'(t)$ が成り立つことを示せ．

問 4　T_1，T_2 は $T_1<T_2$ を満たす実数とする．t が T_1 から T_2 まで変化するときに，2 点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ $L_{\mathrm{P}}(T_1,\ T_2)$，$L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)$ で表す．$L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)$ と $L_{\mathrm{P}}(T_1,\ T_2)$ の差を $\triangle L(T_1,\ T_2)$ とする:

$$\triangle L(T_1,\ T_2)=L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)-L_{\mathrm{P}}(T_1,\ T_2)$$

このとき次が成り立つことを示せ．

$$\triangle L(T_1,\ T_2)=\int_{T_1}^{T_2}\frac{f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2}dt$$

問 5　問 4 までの結果を踏まえて，関数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ に対して，$\triangle L(T_1,\ T_2)$ において同時に $T_1 \longrightarrow -\infty$，$T_2 \longrightarrow \infty$ としたときの極限値

$$\lim_{T_1\to-\infty,\,T_2\to\infty}\triangle L(T_1,\ T_2)$$

を求めよ．

解答　問 1　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\begin{pmatrix} f'(t) \\ -1 \end{pmatrix}$

問 2　$a=t+\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}$，$b=f(t)-\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}$　　証明略

問 3　証明略　　問 4　証明略　　問 5　π

問 1

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} f'(t) \\ -1 \end{pmatrix}$

$b<f(t)$，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=1$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\begin{pmatrix} f'(t) \\ -1 \end{pmatrix}$

問 2

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$
$$=\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\begin{pmatrix} f'(t) \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} t+\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}} \\ f(t)-\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}} \end{pmatrix}$$

よって　$a(t)=t+\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}$，$b(t)=f(t)-\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}$

問 3

$$b'(t)=f'(t)+\frac{\dfrac{f'(t)\cdot f''(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}}{1+\{f'(t)\}^2}$$
$$=f'(t)\cdot\left(1+\frac{f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdots\cdots①$$

ここで，

$$a'(t)=1+\frac{f''(t)\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}-f'(t)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\cdot f'(t)\cdot f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2}$$
$$=1+\frac{f''(t)(1+\{f'(t)\}^2)-\{f'(t)\}^2\cdot f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=1+\frac{f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\cdots\cdots②$$

①②より　$b'(t)=f'(t)a'(t)$ が成り立つ．　（証明終わり）

問 4

$$L_{\mathrm{P}}(T_1,\ T_2)=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$
$$L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{\{a'(t)\}^2+\{b'(t)\}^2}\,dt$$

ここで，$b'(t)=f'(t)a'(t)$ であるから

$$L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{\{a'(t)\}^2+\{f'(t)a'(t)\}^2}\,dt=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{\{a'(t)\}^2(1+\{f'(t)\}^2)}\,dt$$

さらに，$f''(t)\geqq 0$ から $a'(t)>0$ だから

$$L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)=\int_{T_1}^{T_2}a'(t)\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

よって　$\triangle L(T_1,\ T_2)=L_{\mathrm{Q}}(T_1,\ T_2)-L_{\mathrm{P}}(T_1,\ T_2)$

$$=\int_{T_1}^{T_2}(a'(t)-1)\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_{T_1}^{T_2}\frac{f''(t)}{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_{T_1}^{T_2}\frac{f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2}dt$$

（証明終わり）

問 5

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ であるから

$\dfrac{f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2}$ を計算すると　$\dfrac{f''(t)}{1+\{f'(t)\}^2}=\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}=\dfrac{2e^t}{e^{2t}+1}$

よって　$\triangle L(T_1,\ T_2)=\displaystyle\int_{T_1}^{T_2}\frac{2e^t}{e^{2t}+1}dt$

$x=e^t$ とおくと　$\triangle L(T_1,\ T_2)=2\cdot\displaystyle\int_{e^{T_1}}^{e^{T_2}}\frac{1}{x^2+1}dx$　と書ける．

ここで　$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおき，$e^{T_1}=\tan\theta$ となる θ を θ_1 とし，$e^{T_2}=\tan\theta$ となる θ を θ_2 とすると

$$\triangle L(T_1,\ T_2)=2\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=2\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta$$
$$=2\cdot\Big[\theta\Big]_{\theta_1}^{\theta_2}$$
$$=2(\theta_2-\theta_1)$$

ここで　$T_1\to-\infty$，$T_2\to+\infty$ とすると，$\theta_1\to+0$，$\theta_2\to\dfrac{\pi}{2}$ となることから

$$\lim_{T_1\to-\infty,\,T_2\to+\infty}\triangle L(T_1,\ T_2)=\lim_{\theta_1\to+0,\,\theta_2\to\frac{\pi}{2}}\triangle L(T_1,\ T_2)=\lim_{\theta_1\to+0,\,\theta_2\to\frac{\pi}{2}}2(\theta_2-\theta_1)=\pi$$