

## 杏林大学医学部(前期) 数学

2019年 2月1日実施

I

(1)  $U = \{x \mid x \text{ は } 100 \text{ 未満の正の整数}\}$  を全体集合, 集合  $S$  の要素の個数を  $n(S)$  とする.  $U$  の部分集合

$$A = \{x \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}, B = \{x \mid x \text{ は } 4 \text{ の倍数}\}, C = \{x \mid x \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}$$

に対し,  $n(A \cap B) = \boxed{\text{ア}}$ ,  $n(\overline{A \cup B}) = \boxed{\text{イウ}}$ ,  $n(A \cap B \cap C) = \boxed{\text{エ}}$ ,  $n((A \cup B) \cap \overline{C}) = \boxed{\text{オカ}}$  が成り立つ.

(2) X, Y, Z の 3 人がこの順で, 1 から 5 までの 5 枚の番号札が入った袋から, 番号札を 1 枚取り出す. 取り出された番号札は袋に戻さないものとし, 最も小さい数の番号札と 2 番目に小さい数の番号札を引いた 2 人が賞品を受け取る.

X が 3 の番号札を引く場合の数は  $\boxed{\text{キク}}$  であり, X が 3 の番号札を引いて賞品を受け取る場合の数は  $\boxed{\text{ケコ}}$  である.

X が 3 以下の番号札を引いて賞品を受け取る確率は  $\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$  である.

X が 2 以上の番号札を引いて Z が賞品を受け取る確率は  $\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$  である.

X の引いた番号札が 1 でないとき, Z が賞品を受け取る確率は  $\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$  である.

解答

(1)  $1 \leq x \leq 99$  を満たす正の整数のうち,

- 3 の倍数の個数は  $\left[ \frac{99}{3} \right] = 33$  個, 4 の倍数の個数は  $\left[ \frac{99}{4} \right] = 24$  個.
- 5 の倍数の個数は  $\left[ \frac{99}{5} \right] = 19$  個, 12 の倍数の個数は  $\left[ \frac{99}{12} \right] = 8$  個.
- 15 の倍数の個数は  $\left[ \frac{99}{15} \right] = 6$  個, 20 の倍数の個数は  $\left[ \frac{99}{20} \right] = 4$  個.
- 60 の倍数の個数は  $\left[ \frac{99}{60} \right] = 1$  個.

である.

$$n(A \cap B) = 8$$

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B}) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= \mathbf{50} \end{aligned}$$

$$n(A \cap B \cap C) = \mathbf{1}$$

$$\begin{aligned} n((A \cup B) \cap \overline{C}) &= n(\overline{C}) - n(\overline{(A \cup B)} \cap \overline{C}) \\ &= n(\overline{C}) - n(\overline{A \cup B \cup C}) \end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cup B \cup C}) &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)\} \\ &= 40 \end{aligned}$$

である. したがって,  $n((A \cup B) \cap \overline{C}) = \mathbf{40}$  である.

(2) X が 3 の番号札を引くとき, Y と Z は, X が引いた 3 以外の番号札から 1 枚ずつ順番に引けばよいので,  ${}_4P_2 = \mathbf{12}$  (通り).

X が 3 の番号札を引いて, 賞品を受け取れない場合は, Y と Z が 1 と 2 の番号札を引いた場合なので,  $2! = 2$  通り. よって, X が賞品を受け取る場合の数は  $12 - 2 = \mathbf{10}$  (通り).

X が 3 以下の番号札を引いて賞品を受け取る確率は,

- (i) X が 1 または 2 の番号札を引いた場合は必ず受け取るので  $\frac{2}{5}$ .
- (ii) X が 3 の番号札を引いて賞品を受け取る場合は,  $\frac{1}{5} \times \frac{10}{12}$ .

したがって,  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{10}{12} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{30}}$ .

X が 2 以上の番号札を引いて Z が賞品を受け取る確率は, Z が賞品を受け取る確率から, X が 1 の番号札を引いて Z が賞品を受け取る確率を引けばよい.

賞品を受け取る確率は, 番号札を引く順番に影響を受けないので, Z が賞品を受け取る確率は  $\frac{2}{3}$ .

X が 1 の番号札を引くとき, 必ず賞品を受け取る. したがって, Y と Z が賞品を受け取る確率は  $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ .

したがって,  $\frac{2}{3} - \frac{1}{10} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{30}}$ .

X が引いた番号札が 1 でないという事象を A とし, Z が賞品を受け取るという事象を B とすると,

$$P(A \cap B) = \frac{17}{30}, \quad P(A) = \frac{4}{5} \quad \text{であるから,} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{24}}.$$

II

実数を定義域とする関数  $f(x) = \frac{x}{2x^2 + 1}$  に対し、 $y = f(x)$  のグラフを曲線  $C$ 、 $x$  座標が  $\frac{1}{2}$  である曲線  $C$  上の点を  $P$  として、以下の問いに答えよ。

(a)  $f(x)$  は、 $x = \frac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イ}}$  において、極大値  $\frac{\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$  を取る。曲線  $C$  は変曲点を  $\text{オ}$  個もち、そのうち  $x$  座標が最大のものは  $\left( \frac{\sqrt{\text{カ}}}{\text{キ}}, \frac{\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}} \right)$  である。

(b) 点  $P$  における、曲線  $C$  の接線  $l$  の方程式は  $y = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}x + \frac{\text{シ}}{\text{ス}}$  であり、曲線  $C$  と接線  $l$  の  $P$  とは異なる交点は  $\left( -\text{セ}, -\frac{\text{ソ}}{\text{タ}} \right)$  である。

曲線  $C$  と接線  $l$  で囲まれた図形の面積は  $\frac{\text{チ}}{\text{ツテ}} + \frac{\text{ト}}{\text{ナ}} \log_e \text{ニ}$  である。

(c) 点  $P$  を通る傾き  $m$  の直線が、曲線  $C$  と複数の共有点をもつのは

$$\frac{\text{ヌ} - \sqrt{\text{ネ}}}{\text{ノ}} \leq m \leq \frac{\text{ヌ} + \sqrt{\text{ネ}}}{\text{ノ}}$$

のときである。

解答

$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 1}$  の概形を凹凸まで含めて考える。

$$f'(x) = \frac{1 - 2x^2}{(2x^2 + 1)^2}$$

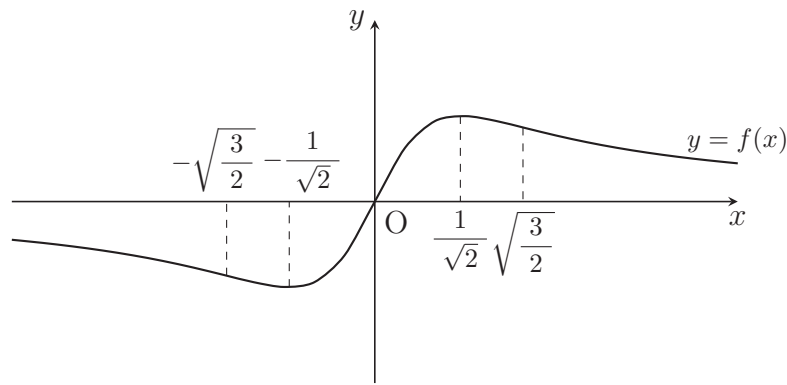
$$f''(x) = \frac{4x(2x^2 - 3)}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4x(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})}{(2x^2 + 1)^2}$$

さらに、 $f(x)$  は奇関数であるから、 $x \geq 0$  の範囲で考えてもよい。増減、凹凸は次のようになる。

$x$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	0	-	-	-	0	+
$f(x)$		↗		↘		↘

さらに、 $\lim_{x \pm \infty} f(x) = 0$  をあわせて、 $C: y = f(x)$  のグラフは以下のようなになる。



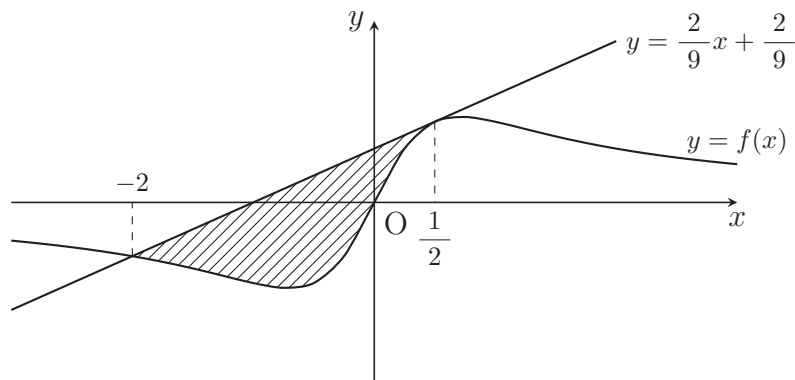
(a) したがって、 $f(x)$  は  $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  において、極大値  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$  をとる。

また、曲線  $C$  は変曲点を 3 個もち、そのうち  $x$  座標が最大のものは  $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$  である。

(b) 点  $P\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  における接線  $l$  は、傾き  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9}$  で、点  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  を通る直線だから、 $l: y = \frac{2}{9}x + \frac{2}{9}$  であり、 $C$  と  $l$  の交点の  $x$  座標は、 $\frac{x}{2x^2+1} = \frac{2}{9}x + \frac{2}{9}$  の解である。整理すると  $9x = 2(2x^3 + 2x^2 + x + 1)$ 、すなわち  $4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$  となる。

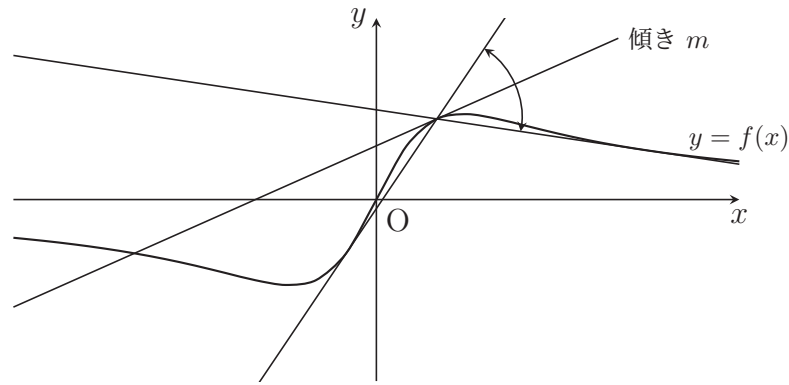
ここで  $P$  が交点であること、つまり  $x = \frac{1}{2}$  が方程式の解となることは明らかである。よって、因数定理から方程式は  $(2x - 1)$  を因数に持つ。

こうして  $4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = (2x - 1)^2(x + 2) = 0$  と計算され  $x = \frac{1}{2}, -2$  であるから、 $P$  とは異なる交点は  $(-2, f(-2)) = \left(-2, -\frac{2}{9}\right)$ 。曲線  $C$  と接線  $l$  で囲まれた図形の概形は以下ようになる。その部分の面積を  $S$  とすると、



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{9}x + \frac{2}{9} - \frac{x}{2x^2+1} \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{9}(x+1)^2 - \frac{1}{4} \log_e(2x^2+1) \right]_{-2}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{5}{36} + \frac{1}{4} \log_e 6 \end{aligned}$$

(c) 点  $P$  を通る傾き  $m$  の直線が曲線  $C$  と複数の共有点をもつのは、以下の範囲



点  $P$  を通り,  $P$  以外の点で接するときの直線の傾きが境目になる. このときの傾きを求める. 接線を  $(t, f(t))$  とすると, 接線の方程式は

$$y = \frac{1-2t^2}{(2t^2+1)^2}(x-t) + \frac{t}{2t^2+1}$$

これが  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  を通るので, 代入して

$$\frac{1}{3} = \frac{1-2t^2}{(2t^2+1)^2}\left(\frac{1}{2}-t\right) + \frac{t}{2t^2+1}$$

両辺  $3(2t^2+1)^2$  倍して, 整理すると

$$8t^4 - 24t^3 + 14t^2 - 1 = 0$$

$P$  での接線も含まれているので,  $(2t-1)^2$  でくくれるのは明らかであるから

$$(2t-1)^2(2t^2-4t-1) = 0$$

よって, 接点の  $x$  座標が  $2t^2-4t-1=0 \therefore t = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$  となるのときの接線の傾きが境目になる. このときの傾きは  $\frac{1-2t^2}{(2t^2+1)^2}$  となるから

$$\begin{aligned} \frac{1-2t^2}{(2t^2+1)^2} &= \frac{1-(4t+1)}{\{(4t+1)+1\}^2} \\ &= \frac{-4t}{4(2t+1)^2} \\ &= \frac{-t}{4t^2+4t+1} \\ &= \frac{-t}{2(4t+1)+(4t+1)} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{t}{4t+1} \\ &= \frac{2 \mp \sqrt{6}}{6} \quad (\text{以上, 複号同順}) \end{aligned}$$

となるから, 傾き  $m$  の範囲は  $-\frac{2-\sqrt{6}}{6} \leq m \leq \frac{2+\sqrt{6}}{6}$ .

III ソ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ。

座標空間において、点  $A_0$  を  $(1, 1, 0)$ 、点  $B_0$  を  $(-1, -1, 0)$ 、点  $C_0$  を  $(1, -1, 0)$  とし、 $xy$  平面上の点  $P_n$  から点  $P_{n+1}$  を定める下記の操作を  $M$  とする。

操作  $M$  点  $P_n$  を  $z$  軸の正の方向に 2 だけ平行移動した後、 $x$  軸のまわりに 1 回転させて得られる点  $P_n$  の軌跡と  $xy$  平面との交点のうち、 $y$  座標が最も大きい点を  $P_{n+1}$  と定める。

(a) 点  $A_0$  に対して操作  $M$  を連続して  $n$  回施して得られる点を  $A_n$ 、この点の  $y$  座標を  $a_n$  とすると、

$$a_1 = \sqrt{\text{ア}}, a_{n+1} = \sqrt{a_n^{\text{イ}} + \text{ウ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。したがって、 $a_n = \sqrt{\text{エ}n + \text{オ}}$  と表せる。

(b)  $0 \leq t \leq 1$  を満たす実数  $t$  に対し、線分  $A_0B_0$  を  $t:1-t$  に内分する点を  $Q_0$  とする。点  $Q_0$  を  $z$  軸の正の方向に 2 だけ平行移動した点と  $x$  軸との距離は、 $\sqrt{\text{カ}t^2 - \text{キ}t + \text{ク}}$  である。

$t$  を  $0 \leq t \leq 1$  の範囲で変化させたとき、点  $Q_0$  に対して操作  $M$  を 1 回施して得られる点  $Q_1$  は、曲線

$$\text{ケ}x^{\text{コ}} + y^2 = \text{サ}$$

上に存在する。

(c) 線分  $A_0C_0$  を  $z$  軸の正の方向に 2 だけ平行移動した線分上の点と  $x$  軸との距離の最小値は  $\text{シ}$  である。

線分  $A_0C_0$  上の点に対し、操作  $M$  を 1 回施して得られる点の集合は、長さ  $\sqrt{\text{ス}} - \text{セ}$  の線分となる。

(d) 三角形  $A_0B_0C_0$  の周および内部の点に対し、操作  $M$  を 1 回施して得られる点の集合を  $D$  とする。集合  $D$  が表す領域の概形は  $\text{ソ}$  である。

※  $\text{ソ}$  の解答群は省略する。

**解答**

点  $P_n$  を  $z$  軸正の方向に 2 だけ平行移動した点を  $P'_n$  と定める。

(a) 点  $A'_0$  から  $x$  軸に下した垂線の足は  $(1, 0, 0)$  であるから、点  $A'_0$  と  $x$  軸との距離は  $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 。したがって、 $a_1 = \sqrt{5}$ 。

また、点  $A_n(1, a_n, 0)$  に対して操作  $M$  を 1 回施し点  $A_{n+1}$  を定めるとき、点  $A'_n$  と  $x$  軸との距離は  $\sqrt{a_n^2 + 2^2}$  であるから、 $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 4}$  である。

この両辺を 2 乗すると、 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 4$  となるので、数列  $\{a_n^2\}$  は初項  $a_1^2 = 5$ 、公差 4 の等差数列をなす。よって

$$a_n^2 = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1.$$

よって、 $a_n = \sqrt{4n + 1}$  である。

(b) 点  $Q_0$  の座標は

$$\overrightarrow{OQ_0} = (1-t)\overrightarrow{OA_0} + t\overrightarrow{OB_0} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、 $Q_0(1-2t, 1-2t, 0)$ 。

よって、 $Q'_0$  は  $(1-2t, 1-2t, 2)$  であり、点  $Q'_0$  と  $x$  軸との距離は

$$\sqrt{(1-2t)^2 + 2^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 5}$$

である。点  $Q_0$  に操作  $M$  を施して得られる点  $Q_1$  の座標は

$$Q_1(1 - 2t, \sqrt{4t^2 - 4t + 5}, 0)$$

つまり、 $t$  を  $0 \leq t \leq 1$  のパラメタとして  $xy$  平面上では

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = \sqrt{4t^2 - 4t + 5} \end{cases}$$

なる曲線を描く。  $t = \frac{1-x}{2}$  として消去すれば

$$-x^2 + y^2 = 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

となる曲線上に点  $Q_1$  は存在する。

(c)  $0 \leq t \leq 1$  を満たす実数  $t$  に対し、線分  $A_0C_0$  を  $s : 1 - s$  に内分する点を  $R_0$  とする。

$$\overrightarrow{OR_0} = (1 - s)\overrightarrow{OA_0} + s\overrightarrow{OC_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2s \\ 0 \end{pmatrix}$$

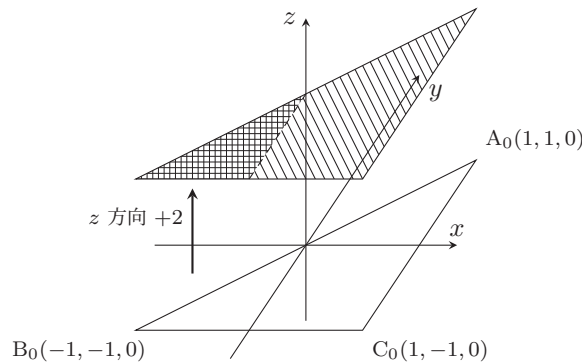
したがって、 $R_0'$  の座標は  $(1, 1 - 2s, 2)$  であり、 $R_0'$  と  $x$  軸との距離は  $\sqrt{(1 - 2s)^2 + 4}$  である。よって、 $x$  軸との距離は  $s = \frac{1}{2}$  のとき、最小値  $2$  となる。

$R_0'$  の点に操作  $M$  を施して得られる点は、 $s$  を  $0 \leq s \leq 1$  のパラメタとして、 $xy$  平面上で

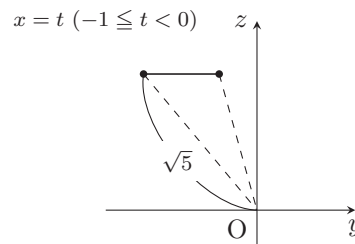
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{(1 - 2s)^2 + 4} \end{cases}$$

表せる。すなわち線分  $x = 1, 2 \leq y \leq \sqrt{5}$  上に存在する。したがって、得られる点の集合の長さは、 $\sqrt{5} - 2$  である。

(d) 三角形  $A_0B_0C_0$  を  $z$  軸の正の方向に  $2$  だけ平行移動した図形を  $x = t$  で切った切口を調べる。



(i)  $-1 \leq t < 0$  のとき

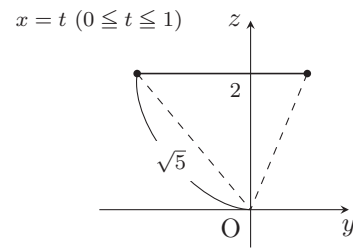


切口と原点の距離の最大値は  $\sqrt{5}$  である。

(b) より切口と原点が最小値となる時、最小値を取る点は  $-x^2 + y^2 = 4$  上にある。

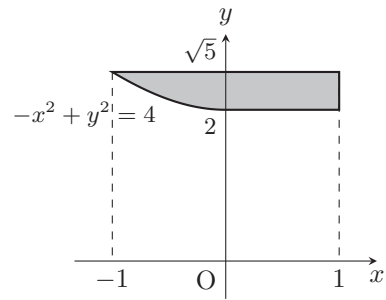
以上をまとめると  $\sqrt{4 + x^2} \leq y \leq 0$ 。

(ii)  $0 \leq t \leq 1$  のとき



(c) より  $2 \leq y \leq \sqrt{5}$ .

以上をまとめると、求める集合  $D$  は以下のようなになる.



よって, ⑦



IV

$x, y$  を正の実数,  $f(x)$  を恒等的に 0 でない微分可能な連続関数とし,  $f'(x)$  はその導関数を表すものとする.

(a) 下記の 6 つの命題が, 任意の正の実数  $x, y$  に対して真となるように,  $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{カ}}$  の解答として適当なものを, 解答群の中から すべて 選べ.

- $f(x) = \boxed{\text{ア}} \implies f(x+y) = f(x) \times f(y)$
- $f(x) = \boxed{\text{イ}} \implies f(x \times y) = f(x) + f(y)$
- $f(x) = \boxed{\text{ウ}} \implies \{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = f(2x)$
- $f(x) = \boxed{\text{エ}} \implies f(f(x)) + f(x) = 0$
- $f(x) = \boxed{\text{オ}} \implies \{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 1$
- $f(x) = \boxed{\text{カ}} \implies 3f(x) + f'(x) = 0$

$\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{カ}}$  の解答群

- ①  $3x+5$     ②  $-x$     ③  $4x^2+1$     ④  $\frac{1}{x+8}$     ⑤  $6\log_2 x$   
 ⑥  $\sin x$     ⑦  $\cos x$     ⑧  $e^{-3x}$     ⑨  $\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$

(b) 設問 (a) で示した 6 つの命題のうち, 上記解答群に挙げた関数に代えて,

$$f(x) = x \quad (\text{ただし, } c \text{ は } 0 \text{ でない適当な定数})$$

とすると真となる命題は  $\boxed{\text{キ}}$  個存在する. また, 設問 (a) で選んだ関数に対し, 逆も真となる命題の数は  $\boxed{\text{ク}}$  個である.

(c)  $f(x+y) = f(x) \times f(y)$  を満たす関数  $f(x)$  に対し,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \boxed{\text{ケ}}$$

が成り立ち,  $f(x \times y) = f(x) + f(y)$  を満たす関数  $f(x)$  に対し,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \boxed{\text{コ}}$$

が成り立つ.

解答

(a)

- ア ⑧ :  $e^{-3x} \implies e^{-3(x+y)} = e^{-3x} \times e^{-3y}$   
 イ ⑤ :  $6\log_2 x \implies 6\log_2(xy) = 6\log_2 x + 6\log_2 y$   
 ウ ⑦ :  $\cos x \implies \cos^2 x - (-\sin^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$   
 エ ② :  $-x \implies -(-x) + (-x) = 0$   
 オ ⑨ :  $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \implies \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$   
 カ ⑧ :  $e^{-3x} \implies 3e^{-3x} + (-3e^{-3x}) = 0$

(b)

- ア  $c = c^2 \iff c = 0, 1$  より,  $c = 1$  ととれば真になる.  
 イ  $c = c + c \iff c = 0$  より真となる  $c$  は存在しない.  
 ウ  $c^2 - 0^2 = c \iff c = 0, 1$  より,  $c = 1$  ととれば真になる.  
 エ  $c + c = 0 \iff c = 0$  より真となる  $c$  は存在しない.

オ  $c^2 - 0^2 = 1 \iff c = \pm 1$  より,  $c = 1$  ととれば真になる.

カ  $3c + 0 = 0 \iff c = 0$  より真となる  $c$  は存在しない.

以上より, 真となる命題は **3** 個である,

また, 設問 (a) で選んだ関数に対して逆も真となる命題を考える.

**キ** を考えた際に真にできるものは, 反例が存在するため偽となる. すなわち, (ア), (ウ), (オ) は不適である.

(イ)'  $f(x \times y) = f(x) \times f(y) \implies f(x) = 6 \log_e x$

(エ)'  $f(f(x)) + f(x) = 0 \implies f(x) = -x$

(カ)'  $3f(x) + f'(x) = 0 \implies f(x) = e^{-3x}$

が真となるかどうかを吟味する.

(イ)' は反例として,  $f(x) = \log_2 x, \log_3 x$  などが存在する.

(エ)' は反例として,  $f(x) = 2e^{-3x}, 3e^{-3x}$  などが存在する.

(カ)' については, 以下のように示す.

$f(x)$  を実数全体で定義された, 恒等的に 0 でない微分可能な関数とするとき

$$f(f(x)) + f(x) = 0 \text{ ならば } f(x) = -x$$

注 実際の問題文では「 $f(x)$  を恒等的に 0 でない微分可能な連続関数」としているが, 微分可能ならば連続である.

注 また, 問題文の「正の実数」は (a) でのみ考える条件と解釈した. そうでないと, 証明の過程で問題自体に矛盾が生じる.

[証明]

$$f(f(x)) + f(x) = 0 \quad \dots (\spadesuit)$$

とおく. (b) の **キ** より  $(\spadesuit)$  を満たす関数が定数関数であるとする,  $f(x) \equiv 0$  (任意の  $x$  について 0) となり題意に反する. したがって  $f(x)$  は定数関数ではないため, 0 以外のある値  $k$  (実数) をとり得る. すなわち, ある実数  $a$  が存在して

$$f(a) = k \quad \dots \textcircled{1}$$

となる.  $x = a$  を  $(\spadesuit)$  に代入して

$$f(f(a)) + f(a) = 0$$

$$\therefore f(k) = -k \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する. 定義域を実数全体としたときの  $f(x)$  の値域を  $Range(f)$  と書く.  $f$  は連続であること (中間値の定理より,  $-k$  と  $k$  の間の値はとり得ることに注意して), および  $(\spadesuit)$  から,

$$f(x) = -x \quad (x \in Range(f)) \quad \dots \textcircled{3}$$

であり,  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  および  $f(x)$  の連続性から, ある正の実数  $c$  を用いて

$$Range(f) = [-c, c] \text{ または } (-c, c) \quad \dots \textcircled{4}$$

という形をしていることがわかる.

$[-c, c]$  は  $-c \leq f(x) \leq c$ ,  $(-c, c)$  は  $-c < f(x) < c$  の意味で考えて構わない)

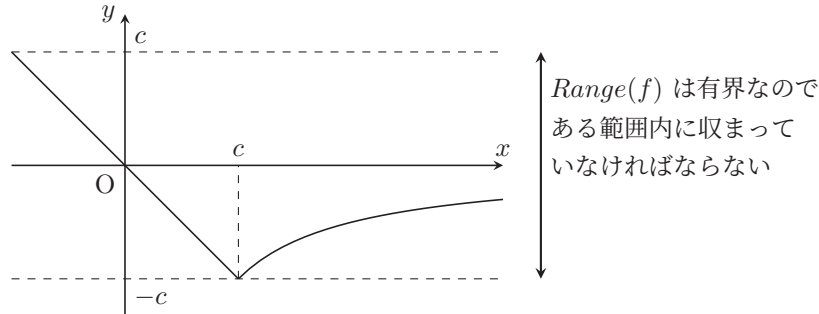
(注  $k(\neq 0)$ ,  $-k$  がとり得る値なので,  $x > 0$  の範囲でのみ考えると  $(\spadesuit)$  の  $f(f(x))$  が定義されないため, 問題が生じる.)

この  $f$  の値域  $Range(f)$  が実数全体であることを示せばよい。

以下、これを背理法によって示す。  $f$  の値域  $Range(f)$  が有界である（ある範囲に収まっている）とすると、④より

$$Range(f) = [-c, c] \text{ または } (-c, c)$$

の形である。したがって、  $y = f(x)$  のグラフは例えば以下のようにならない。



特に  $x = c$  での微分係数を考えると、左側微分係数は

$$\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = -1$$

右側微分係数は（存在すれば）

$$\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

で与えられるが、  $f(x) - f(c) \geq 0$ 、および  $x - c > 0$  であるから

$$\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

となり、  $x = c$  で微分不可能であることがわかるため、  $f$  が実数全体で微分可能であることに矛盾する。

したがって、  $Range(f)$  は有界とならず、ある範囲に収まることはないため、  $Range(f)$  は実数全体でなければならない。よって、③と合わせ、実数全体で  $f(x) = -x$  であることが示された。（証明終）

以上より、逆も真となる命題の数は 1 個。

(c)  $f(x + y) = f(x) \times f(y)$  を満たす関数  $f(x)$  に対し、連続性に注意して

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x + y) = f(0 + y) = f(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) \times f(y) = \left( \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right) \times f(y)$$

したがって、

$$f(y) = \left( \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right) \times f(y)$$

$f(y)$  は恒等的に 0 ではないので、  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ .

また、  $f(x \times y) = f(x) + f(y)$  を満たす関数  $f(x)$  に対し、連続性に注意して

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x \times y) = f(1 \times y) = f(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + f(y)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + f(y)$$

であるから、

$$f(y) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + f(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

## 講評

60分という時間の中で、すべての問題を解き切るのは困難であろう。

I, II でできる限り点数を取りたいが、試験時間との兼ね合いで後半は解き切れなかった受験生も多いだろう。

IV はすべて選べという問題文に悩まされたかもしれないが、(a) はできるだけ取りたかった。

合計で 60 % とれば勝負になるだろう。

本解答速報の内容に関するお問合せは

  
heart of medicine  
**医学部専門予備校**  
**YMS**  
☎ 03-3370-0410 <https://yms.ne.jp/>  
東京都渋谷区代々木1-37-14

医学部進学予備校 **メビオ** ☎ 0120-146-156  
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校  
**英進館メビオ** 福岡校 ☎ 0120-192-215  
<https://www.mebio-eishinkan.com/>

メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧

メルマガ登録



LINE 登録

