

IV [ク] を以下の通り訂正いたします。

示すべき問題は以下ようになります。

$f(x)$ を実数全体で定義された、恒等的に 0 でない、微分可能な関数とするとき

$$f(f(x)) + f(x) = 0 \quad \text{ならば} \quad f(x) = -x$$

(注) 実際の問題文では「 $f(x)$ を恒等的に 0 でない微分可能な連続関数」としているが、微分可能ならば連続である。

(注) また、問題文の「正の実数」は (a) でのみ考える条件と解釈した。そうでないと、証明の過程で問題自体に矛盾が生じる。

[証明]

$$f(f(x)) + f(x) = 0 \quad \dots (\spadesuit)$$

とおく. (b) の [キ] より (\spadesuit) を満たす関数が定数関数であるとするとき、

$$f(x) \equiv 0 \quad (\text{恒等的})$$

となり題意に反する. したがって $f(x)$ は定数関数ではないため、0 以外のある値 k (実数) をとり得る. すなわちある実数 a が存在して

$$f(a) = k \dots \textcircled{1}$$

とできる. $x = a$ を (\spadesuit) に代入して

$$f(f(a)) + f(a) = 0$$

$$\therefore f(k) = -k \dots \textcircled{2}$$

が成立するから、 f が連続であること ($-k$ と k の間の値は中間値の定理により、とり得ることに注意して)、および (\spadesuit) から定義域を実数全体としたときの $f(x)$ の値域を $Range(f)$ と書くことにすれば ((\spadesuit) は f の中に $f(x)$ が入っているの、)

$$f(x) = -x \quad (x \in Range(f)) \quad \dots \textcircled{3}$$

であり、\textcircled{1}、\textcircled{2} および $f(x)$ の連続性から、ある正の実数 c を用いて

$$Range(f) = [-c, c] \text{ または } (-c, c) \dots \textcircled{4}$$

という形をしていることがわかる。

(※ $[-c, c]$ は $-c \leq f(x) \leq c$, $(-c, c)$ は $-c < f(x) < c$ の意味で考えて構わない)

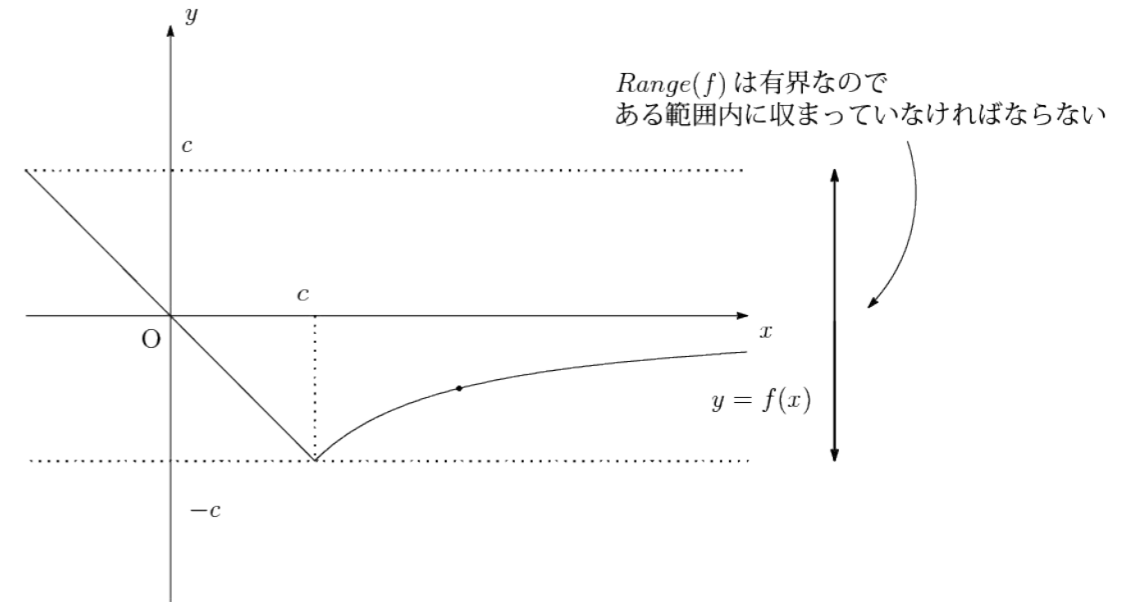
(注) したがって、 $k (\neq 0)$, $-k$ は特に $f(x)$ がとり得る値なので、 $x > 0$ の範囲でのみ考えると (\spadesuit) の $f(f(x))$ が定義されないため、問題が生じる。

あとはこの f の値域: $Range(f)$ が実数全体であることが示されればよい。

以下、これを背理法により示す. f の値域: $Range(f)$ が有界である (ある範囲に収まっている) とすると \textcircled{4} より

$$Range(f) = [-c, c] \text{ または } (-c, c)$$

の形である. したがって、 $y = f(x)$ のグラフは例えば以下のようにならない。



特に $x = c$ での微分係数を考えると、左側微分係数は

$$\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = -1$$

右側微分係数は (存在すればの話. 存在しなければ矛盾)

$$\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

で与えられるが、

$$f(x) - f(c) \geq 0, \text{ および } x - c > 0$$

であるから

$$\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

となり、 $x = c$ で微分不可能であることがわかるため、 f が実数全体で微分可能であることに矛盾する。

したがって、 $Range(f)$ は有界とならず、ある範囲に収まることはないため、 $Range(f)$ は実数全体でなければならない. よって、\textcircled{3} とあわせ、実数全体で

$$f(x) = -x$$

であることが示された。