YMS 2019年度 解答速報 東北医科薬科大学 数学

YMS HPにも掲載中! https://yms.ne.jp/

[I]

xyz 空間内に点 A(2, 1, 1), B(−1, 1, 2), C(1, −1, 0) がある．このとき，次の問に答えよ．

(1) 三角形 ABC の面積は $\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である．

(2) 原点を O(0, 0, 0) とおく．点 O，C を通る直線を l とし，直線 l 上の点 D の x 座標を t とおく．また，点 E は，点 A，B を通る直線上を動くとする．

このとき，DE^2 の最小値は $f(t)=\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}t^2+\boxed{\text{オカ}}t+\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

さらに，t が全ての実数を動くとき，$f(t)$ は $t=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ をとる．

解答 (1) $\sqrt{14}$ (2) $\dfrac{11t^2+10t+35}{10}$，$t=\dfrac{-5}{11}$，$\dfrac{36}{11}$

【解説】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6\cdot12-4^2}=\sqrt{14}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表せるから，

$$\mathrm{D}(t,\ -t,\ 0),\qquad \mathrm{E}(2-3s,\ 1,\ 1+s)$$

したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{DE}^2&=(2-3s-t)^2+(1+t)^2+(1+s)^2\\&=10s^2+(6t-10)s+2t^2-2t+6\\&=10\left(s+\frac{3t-5}{10}\right)^2+\frac{11t^2+10t+35}{10}\end{aligned}$$

s は全ての実数を動くことができるから，DE^2 の最小値 $f(t)$ は，

$$f(t)=\frac{11t^2+10t+35}{10}$$

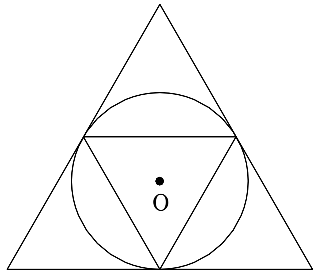
さらに，t が全ての実数を動くとき，

$$f(t)=\frac{1}{10}\left(t+\frac{5}{11}\right)^2+\frac{36}{11}$$

であるから，$f(t)$ は $t=\dfrac{-5}{11}$ のとき最小値 $\dfrac{36}{11}$ をとる．

[II]

中心 O，半径 1 の円に，2 つの正三角形がそれぞれ，外接，内接し，外接正三角形を図のように 7 つの領域に分けている．



1 つの領域には同じ色を塗り，境界線を共有する 2 つの領域には互いに異なる色を塗ることによって，この 7 つの領域を塗り分ける．ただし，点 O を中心に ±120° 回転，または，この図を裏返（点 O と外接三角形の頂点を結ぶ直線に関し反転）して互いに重なる塗り分けは同じと見なす．このとき，次の問に答えよ．

(1) 赤色と青色の 2 色で塗り分ける方法は $\boxed{\text{ア}}$ 通りである．

(2) 赤色，青色，緑色のうち 2 色を用いて塗り分ける方法は $\boxed{\text{イ}}$ 通りである．

(3) 赤色，青色，緑色の 3 色を全て用いて塗分ける方法は $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りである．

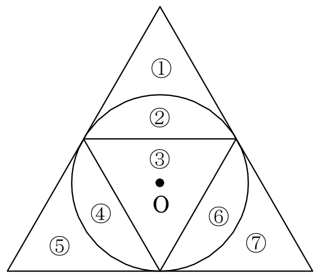
(4) (3) の塗分けのうち，赤色領域の面積の総和が最大となるように塗り分ける方法は

$\boxed{\text{オ}}$ 通りである．また，その総和の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}-\boxed{\text{ケ}}\pi}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

解答 (1) 2 (2) 6 (3) 54 (4) 2，$\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{4}$

【解説】

7 つの領域を右の図のように① ～ ⑦ とおく．



(1) 2 色を用いて塗り分けるとき，

(①，③，⑤，⑦) と (②，④，⑥) のそれぞれ赤色または青色を塗ればよいので　2 通り

(2) 赤色，青色，緑色のうち，用いる 2 色の選び方は　${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通り

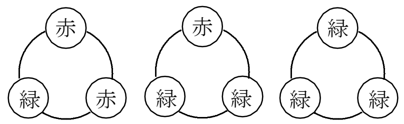
その塗り分け方は，(1) と同様に 2 通りあり，

$3\times2=6$ 通り

(3) まず ③ に赤色を塗るときを考える．(②，④，⑥) に青色または緑色を塗り分ける方法を場合分けする．

（ア） (②，④，⑥) の全てに青色を塗るとき

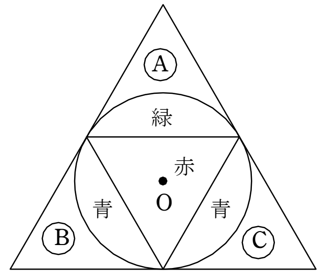
(①，⑤，⑦) に赤色または緑色を塗る方法は，点 O を中心に ±120° 回転，または，この図を裏返して互いに重なる塗り分けを同じ場合とみなす．3 色を全て用いるので，



の 3 通りである．

（イ） (②，④，⑥) のうち 2 つの領域に青色を塗り，残り 1 つの領域に緑色を塗るとき

回転，裏返して同じ場合を除くので，以下の図のように固定して考えることができる．



A には，赤色または青色を塗る：2 通り

(B，C) には，赤色または緑色を塗る．このとき，裏返して同じ場合を除くので，

(赤，赤)，(赤，緑)，(緑，緑)

の 3 通り．

したがって，$2\times3=6$ 通り．

（ウ） (②，④，⑥) のうち 2 つの領域に緑色を塗り，残り 1 つの領域に青色を塗るとき

（イ）の場合と同様に考えて　6 通り．

（エ） (②，④，⑥) の全てに緑色を塗るとき

（ア）の場合と同様に考えて　3 通り．

したがって，　$3+6+6+3=18$ 通り．

③ に青色，緑色を塗る場合も同じように考えればよいので，

$18\times3=54$ 通り

(4) 領域 ①，②，…，⑦ の面積をそれぞれ S_1，S_2，…，S_7 とおく．

$$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{3})^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2=S_4=S_6=\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_1=S_5=S_7=\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2-\pi\right\}\times\frac{1}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

赤色領域の面積の総和が最大となるのは，(①，③，⑤，⑦) を塗る場合，または (②，④，⑥) を塗る場合のいずれかである．

$$S_1+S_3+S_5+S_7=\frac{15\sqrt{3}-4\pi}{4},\quad S_2+S_4+S_6=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

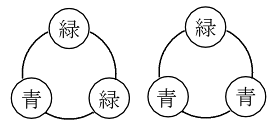
ここで，この 2 つの値の大小を比較する．

$$\frac{15\sqrt{3}-4\pi}{4}-\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}-4\pi}{2}=\frac{\sqrt{243}-\sqrt{16\pi^2}}{2}>0$$

であるから，求める最大値は $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{4}$

(参考) 2 数のうち，解答欄に適するのは $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{4}$ のみである．

またこのとき，(①，③，⑤，⑦) に赤色を塗り，(②，④，⑥) に青色と緑色を塗り分ける方法は，必ず両方の色を用いなければならないので，



このように 2 通りである．

[III]

楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ① と直線 $y=p\ (2<p)$ ② を考える．直線 ② 上の点 Q$(t,\ p)\ (0\leqq t)$ から楕円 ① の 2 つの接線 l_1，l_2 をひき，それぞれの接点を $\mathrm{Q}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) $t=3$ のとき，接点 $\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ の座標は $(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$ である．また，接線 l_1 の傾きは $\dfrac{p^2-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}p}$ であり，また $x_1=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}-\boxed{\text{キ}}p^2}{\boxed{\text{ク}}+p^2}$ である．

(2) $t=3$，$p=2\sqrt{3}$ とする．このとき，$x_1=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．また，この楕円の内部の点 $(x,\ y)$ で $x_1\leqq x$，$0\leqq y$ にある部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}\pi+\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

(3) $t\neq 3$ とする．2 つの接線 l_1，l_2 が直交するとき $p^2+t^2=\boxed{\text{タチ}}$ である．また，直交しないとき，2 つの接線 l_1，l_2 がなす角 $\angle \mathrm{Q_1QQ_2}$ を θ とおくと

$$|\tan\theta|=\frac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}p^2+\boxed{\text{ト}}t^2-\boxed{\text{ナニ}}}}{|p^2+t^2-\boxed{\text{ヌネ}}|}$$ である．

解答 (1) $(3,\ 0)$，$\dfrac{p^2-4}{6p}$，$\dfrac{12-3p^2}{4+p^2}$　(2) $\dfrac{-3}{2}$，$\dfrac{8\pi+3\sqrt{3}}{4}$

(3) 13，$\dfrac{2\sqrt{9p^2+4t^2-36}}{|p^2+t^2-13|}$

【解答】

接線 l_1 の傾きを m とすると，l_1 の方程式は，

$$y=m(x-t)+p \iff y=mx+n \quad (\text{ただし，} n=p-mt) \quad \cdots③$$

これが楕円 ① と接するための条件を求めておく．

③ を ① に代入して，

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(mx+n)^2}{4}=1 \iff (9m^2+4)x^2+18mnx+(9n^2-36)=0 \quad \cdots④$$

判別式を D として，

$$\frac{D}{4}=(9mn)^2-(9m^2+4)(9n^2-36)=36(9m^2-n^2+4)$$

①，③ が接するとき $D=0$ であるから，

$$9m^2-n^2+4=0 \iff 9m^2-(p-mt)^2+4=0$$
$$\iff (t^2-9)m^2-2ptm+(p^2-4)=0 \quad \cdots⑤$$

(1) $t=3$ のとき，接点 Q_2 の座標は $(3,\ 0)$ である．

また，⑤ $\iff -6pm+(p^2-4)=0$ より，接線 l_1 の傾きは，

$$m=\frac{p^2-4}{6p} \quad \cdots⑥$$

このとき，④ の重解が x_1 となるから，

$$x_1=-\frac{9mn}{9m^2+4}=-\frac{9m(p-3m)}{9m^2+4}=\frac{12-3p^2}{4+p^2} \quad (\text{⑥ を代入して計算})$$

(2) (1) の結果を用いて，$p=2\sqrt{3}$ のとき $x_1=\dfrac{-3}{2}$

楕円 ① の $0\leqq y$ の部分は，$y=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ と表せる．

したがって，求める面積を S とすると，

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{3}\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$x=3\sin u$ と置換して，

$$S=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}3|\cos u|\cdot 3\cos u\,du=6\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du$$

$$=3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du=3\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{4}$$

(3) $t\neq 3$ のとき，2 つの接線 l_1，l_2 の傾きは方程式 ⑤ の 2 解である．

この 2 解を m_1，m_2 とすると，

$$m_1+m_2=\frac{2pt}{t^2-9},\quad m_1m_2=\frac{p^2-4}{t^2-9}$$

l_1，l_2 が直交するとき，$m_1m_2=-1$ であるから，

$$\frac{p^2-4}{t^2-9}=-1 \iff p^2+t^2=13$$

直交しないとき，$|\tan\theta|=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ であるから，

$$|\tan\theta|=\frac{\sqrt{(m_1-m_2)^2}}{|1+m_1m_2|}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{|1+m_1m_2|}$$
$$=\frac{2\sqrt{9p^2+4t^2-36}}{|p^2+t^2-13|}$$

【別解】補助円を利用すると，以下のように解ける．

楕円 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，直線 $l:y=p$ とし，これらを y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ 倍した図形を円 C'，直線 l' とおく．以下，点は図に描かれているように設定する．

$$C':x^2+y^2=9,\quad l':y=\frac{3}{2}p$$

このとき，fig.1，fig.2 のようになる．

fig.1

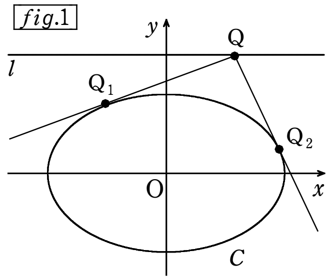
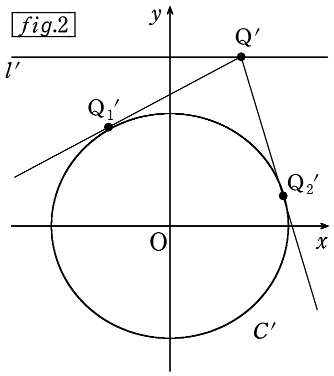


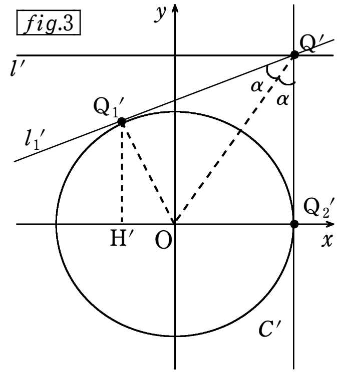
fig.2



(1) $t=3$ のとき，点 Q_2 における接線は y 軸に関して平行であり，Q_2 の座標は $(3,\ 0)$．

このとき，fig.3 のようになるので，$\angle \mathrm{OQ'Q_2'}=\alpha$ とおくと，

fig.3



$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{OQ_2'}}{\mathrm{Q'Q_2'}}=\frac{3}{\frac{3}{2}p}=\frac{2}{p}$$

であるから，

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4p}{p^2-4}$$

直線 l_1' と x 軸とのなす角は $\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$ であり，

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{p^2-4}{4p}$$

したがって，直線 l_1 の傾きは

$$\frac{p^2-4}{4p}\times\frac{2}{3}=\frac{p^2-4}{6p}$$

また，fig.3 において，$\angle \mathrm{Q_1'OH'}=2\alpha$ であるから，

$$\mathrm{OH'}=\mathrm{OQ_1'}\cdot\cos 2\alpha=3\cdot(2\cos^2\alpha-1)=3\cdot\left(\frac{2}{1+\tan^2\alpha}-1\right)=\frac{3p^2-12}{4+p^2}$$

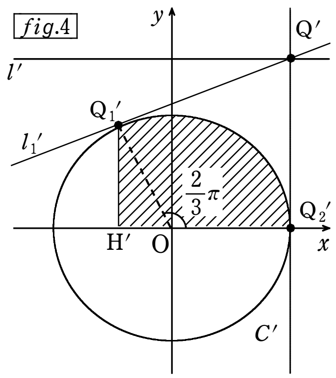
となり，$x_1=-\mathrm{OH'}=\dfrac{12-3p^2}{4+p^2}$

(2) $t=3$，$p=2\sqrt{3}$ のとき，

$$x_1=\frac{12-3\cdot(2\sqrt{3})^2}{4+(2\sqrt{3})^2}=-\frac{3}{2}.$$

したがって，円 C' の内部の $(x,\ y)$ で $x_1\leqq x$，$0\leqq y$ にある部分の面積は，fig.4 の斜線部を考えればよく，

fig.4



$$\frac{1}{2}\cdot3^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\pi+\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

この面積を $\dfrac{2}{3}$ 倍することにより，$\dfrac{8\pi+3\sqrt{3}}{4}$

(3) $t\neq 3$ のとき，接線の方程式を $y=mx+n$ とおく．これが楕円 C と接するときを考えればよい．

これらを y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ 倍するとき，

$$\text{円 } C' \text{ に直線 } \frac{2}{3}y=mx+n \iff mx-\frac{2}{3}y+n=0 \text{ が接する}$$

条件を考えればよい．円 C' の中心と直線との距離を d と置けば

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+\frac{4}{9}}}$$

これが円 C' の半径と一致するので，

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+\frac{4}{9}}}=3 \iff |n|=\sqrt{9m^2+4} \iff n^2=9m^2+4 \quad \cdots⑦$$

ここで，直線 $y=mx+n$ が点 $(t,\ p)$ を通るので，

$$p=mt+n \iff n=p-mt$$

であり，これを ① に代入すると

$$(p-mt)^2=9m^2+4 \iff (t^2-9)m^2-2ptm+p^2-4=0 \quad \cdots⑧$$

方程式 ② の解が求める直線の傾き m_1，m_2 である．l_1，l_2 が直交するとき，解と係数の関係から，

$$m_1\times m_2=\frac{p^2-4}{t^2-9}=-1 \iff p^2+t^2=13$$

さらに，② の 2 解は

$$m=\frac{pt\pm\sqrt{p^2t^2-(t^2-9)(p^2-4)}}{t^2-9}$$

であるから，2 つの接線のなす角は，

$$|\tan\theta|=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\frac{2\sqrt{9p^2+4t^2-36}}{|p^2+t^2-13|}$$

【講評】

[I] は完答すべき問題である．

[Ⅲ] は楕円の典型題なので，しっかりと加点してほしいが，テクニカルに解かなければ計算は煩雑になる．

[II] の (2) 以降は点差が分かれたと思われる．

大問の途中でつまづいても，その後の問題で加点できるものもあったので最後まで問題に食らいつく姿勢で差が出る問題であった．

全体で 70% 取ってほしい．