**1**

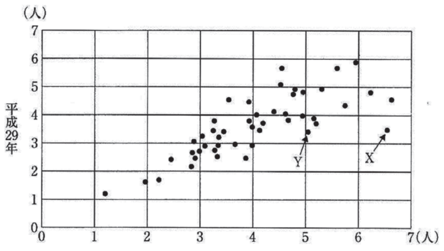
(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) 複素数 $z$ が $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たすとき, $z^{20}+\dfrac{1}{z^{20}}$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である.

(3) 三角形 ABC において,各辺の長さを AB=7, AC=5, BC=8 とする. A から直線BC に下ろした垂線と直線 BC の交点を H とする.このとき, AH の長さは $\boxed{\text{ウ}}$ である.

(4) $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{t}{\log t}dt$ $(x>1)$ に対して, $f'(\sqrt{e})$ の値は $\boxed{\text{エ}}$ である.

(5) 図 1 は平成 27 年と平成 29 年の 47 都道府県ごとの人口 10 万人あたりの交通事故死者数の散布図である.また図 2 の 5 つの箱ひげ図には,平成 27 年および平成 29 年の 47 都道府県ごとの人口 10 万人あたりの交通事故死者数に対する箱ひげ図が含まれている.




平成 27 年

図 1

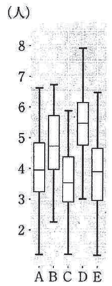



図 2

(出典:「道路の交通に関する統計」(交通局交通企画課)を加工して作成)

図 1 と図 2 から読み取れる,都道府県ごとの 1 年間の人口 10 万人あたりの交通事故死者数についての記述について,正しいものは $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ である.

a. 人口 10 万人あたりの交通事故死者数の最大値は,平成 27 年の方が平成 29 年より大きい.

b. 散布図の点 Y の平成 27 年の値は,その年の人口 10 万人あたりの交通事故死者数の中央値である.

c. 平成 27 年の箱ひげ図は A である.

d. 平成 29 年の箱ひげ図は E である.

e. 図 1 の点 X がある場合とない場合では,ない場合の方が相関係数の値が大きくなる.

f. 平成 27 年と平成 29 年の人口 10 万人あたりの交通事故死者数には負の相関がある.

解答 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-1$ (3) $\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$ (4) $2(e-1)\sqrt{e}$ (5) a, c, e

【解説】

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta^3}\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta^3}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\\&=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

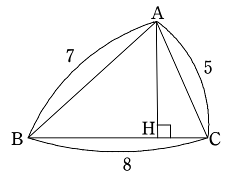
(2) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ より,両辺 $z$ 倍して整理すると $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

これを解いて $z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)$ (複号同順)

よって $z^{20}+\dfrac{1}{z^{20}}=z^{20}+z^{-20}$

$$\begin{aligned}&=\cos\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right)+\cos\left(\mp\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(\mp\frac{10}{3}\pi\right)\quad(\text{複号同順})\\&=2\cos\frac{10}{3}\pi\\&=2\cos\frac{4}{3}\pi\\&=-1\end{aligned}$$

(3) 余弦定理より




$\cos A=\dfrac{49+25-64}{2\cdot 7\cdot 5}=\dfrac{1}{7}$ ∴ $\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

∴ (△ABCの面積)$=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 5\cdot\sin A=10\sqrt{3}$

∴ $8\times\text{AH}\times\dfrac{1}{2}=10\sqrt{3}$ ∴ $\text{AH}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

【補足】

$\cos C=\dfrac{25+64-49}{2\cdot 5\cdot 8}=\dfrac{1}{2}$ ∴ $C=60^\circ$ ∴ $\text{AH}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

(4) $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{t}{\log t}dt$ において, $g(t)=\dfrac{t}{\log t}$ とし, $g(t)$ の原始関数の 1 つを $G(t)$ とすると

$$f(x)=\Big[G(t)\Big]_x^{x^2}=G(x^2)-G(x)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f'(x)&=g(x^2)\cdot 2x-g(x)\\&=\frac{x^2}{\log x^2}\cdot 2x-\frac{x}{\log x}\\&=\frac{x^3-x}{\log x}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f'(\sqrt{e})=\frac{e\sqrt{e}-\sqrt{e}}{\frac{1}{2}}=2(e-1)\sqrt{e}$$

(5) b: 点Yの数字は平成 27 年において,9 番目に大きい数字だから,中央値にはならない.

d: 平成 29 年の散布図で,最大値は 6 を超えているので箱ひげ図は E ではない.

f: 散布図では,正の相関が見られるので正しくない.

**2**

$xy$ 平面において,点 $\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ を中心とし, $x$ 軸に接する円を $C_0$ とする.

(1) 円 $C_0$ と $x>0$ の範囲で外接し,かつ $x$ 軸にも接する円の中心の座標を $(p,\ q)$ とする. $q$ を $p$ で表すと $q=\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) 円 $C_1$ は中心の $x$ 座標が $a_1=1$ であり, $x>0$ の範囲で $C_0$ に外接し,かつ $x$ 軸に接する.また円 $C_2$ は中心の $x$ 座標が $a_2$ であり, $C_0$, $C_1$ の両方に外接し,かつ $x>0$ の範囲で $x$ 軸に接する.以下, $n=3,\ 4,\ \cdots$ に対して,中心の $x$ 座標が $a_n$ であり, $C_0$ と $C_{n-1}$ の両方に外接し,かつ $x$ 軸に接する円を $C_n$ とする.ただし, $C_n$ と $C_{n-2}$ は異なる.このとき, $C_n$ の半径を $a_n$ を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ であり, $a_n$ と $a_{n+1}$ との間には

$$(a_n-a_{n+1})^2=\boxed{\text{ウ}}\,a_{n+1}{}^2a_n{}^2\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成立する.したがって, $a_{n+1}$ を $a_n$ を用いて表すと, $a_{n+1}=\boxed{\text{エ}}$ である.このようにして定まる数列 $\{a_n\}$ において $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく.このとき $b_{n+1}$ を $b_n$ を用いて表すと $b_{n+1}=\boxed{\text{オ}}$ である.したがって数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{\text{カ}}$ である.

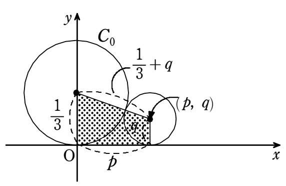
(3) $C_n$ の面積を $S_n$ とするとき, $S_n=\boxed{\text{キ}}$ であるから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^4S_n$ の値は $\boxed{\text{ク}}$ である.

解答 (1) ア: $\dfrac{3}{4}p^2$ (2) イ: $\dfrac{3}{4}a_n{}^2$ ウ: $\dfrac{9}{4}$ エ: $\dfrac{2a_n}{3a_n+2}$ オ: $b_n+\dfrac{3}{2}$ カ: $\dfrac{2}{3n-1}$

(3) キ: $\dfrac{9\pi}{(3n-1)^4}$ ク: $\dfrac{\pi}{9}$

【解説】

(1)

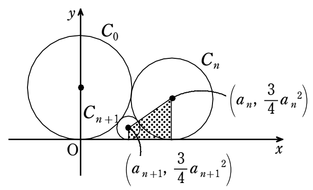



$q>0$ であり,図の斜線部分の台形に注目して,三平方の定理を考えると

$$\left(q+\frac{1}{3}\right)^2=p^2+\left(q-\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow q^2+\frac{2}{3}q+\frac{1}{9}=p^2+q^2-\frac{2}{3}q+\frac{1}{9}$$

∴ $q=\dfrac{3}{4}p^2$

(2)




$C_n$ と $C_{n+1}$ の位置関係は上図のようになる.斜線部分の台形に注目して,三平方の定理を考える.

(1) の結果から, $C_n$ の半径は $\dfrac{3}{4}a_n{}^2$, $C_{n+1}$ の半径は $\dfrac{3}{4}a_{n+1}{}^2$ であるから,

$$\left(\frac{3}{4}a_n{}^2+\frac{3}{4}a_{n+1}{}^2\right)^2=\left(\frac{3}{4}a_n{}^2-\frac{3}{4}a_{n+1}{}^2\right)^2+(a_n-a_{n+1})^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{9}{8}a_n{}^2a_{n+1}{}^2=-\frac{9}{8}a_n{}^2a_{n+1}{}^2+(a_n-a_{n+1})^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (a_n-a_{n+1})^2=\frac{9}{4}a_n{}^2a_{n+1}{}^2$$

$a_n>a_{n+1}>0$ であるから, $a_n-a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_na_{n+1}$

∴ $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+2}$ ∴ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{3}{2}$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと, $b_{n+1}=b_n+\dfrac{3}{2}$ $\left(b_1=\dfrac{1}{a_1}=1\right)$

数列 $\{b_n\}$ は初項 1,公差 $\dfrac{3}{2}$ の等差数列なので, $b_n=\dfrac{3}{2}(n-1)+1=\dfrac{3n-1}{2}$

これより, $a_n=\dfrac{2}{3n-1}$

(3) 円$C_n$の半径は $\dfrac{3}{4}a_n{}^2$ であるから, $S_n=\pi\left(\dfrac{3}{4}a_n{}^2\right)^2=\dfrac{9a_n{}^4}{16}\pi=\dfrac{9\pi}{(3n-1)^4}$

これより, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^4S_n=\lim_{n\to\infty}9\pi\left(\frac{n}{3n-1}\right)^4=\lim_{n\to\infty}9\pi\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^4=\frac{\pi}{9}$

**3**

2 つの関数

$$f(x)=-|x|(|x|-3),\quad g(x)=a(x+1)$$

を考える.ただし$a>0$ とする. $y=f(x)$ のグラフを $C_1$, $y=g(x)$ のグラフを $C_2$ とする.

(1) $C_1$ と $x$ 軸との共有点は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個である.

(2) $C_2$ が $a$ の値によらず必ず通る点の座標は $\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ である.

(3) $C_1$ と $C_2$ の共有点の個数が 2 個となる $a$ の条件は $\boxed{\text{エ}}$ であり, 3 個となる $a$ の条件は $\boxed{\text{オ}}$ であり, 4 個となる $a$ の条件は $\boxed{\text{カ}}$ である.

(4) $C_1$ と $C_2$ が接点をもつとき, $C_1$ と $C_2$ の共有点の $x$ 座標は小さい順に $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ である.さらに,このとき $C_1$ と $C_2$ によって囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である.

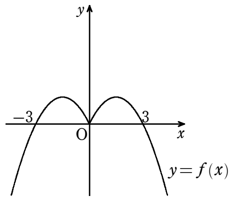
解答 (1) ア: 3 (2) イ: $-1$ ウ: 0 (3) エ: $1<a$ オ: $a=1$ カ: $0<a<1$

(4) キ: $-2-\sqrt{3}$ ク: $-2+\sqrt{3}$ ケ: 1 コ: $6\sqrt{3}-3$

【解説】

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-3)\ (x\geqq 0\text{ のとき})\\-x(x+3)\ (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$

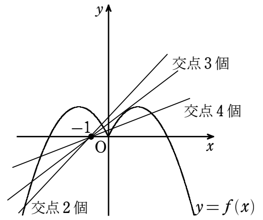
であるから, $y=f(x)$ のグラフを書くと,以下のようになる.




(1)　グラフより，$x$ 軸との共有点は全部で 3 個である．

(2)　$x=-1$ を $y=a(x+1)$ に代入すると，$y=0$ となる．よって，$a$ の値によらず $y=a(x+1)$ は必ず $(-1,\ 0)$ を通る．

(3)




図のように，$a>0$ において，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が接するときが，交点が 3 個になるときであり，そのときの $a$ の値よりも $a$ が大きければ交点は 2 個となり，小さければ交点は 4 個となる．

つまり，$x>0$ において，$y=a(x+1)$ と $y=-x(x-3)$ が接する $a$ の値を求めると，

$a(x+1)=-x(x-3) \Leftrightarrow x^2+(a-3)x+a=0$

この判別式を $D$ とすると，$D=0$ から　$(a-3)^2-4a=0 \Leftrightarrow (a-1)(a-9)=0$

図から，$a=1$ のときに $x>0$ で $y=a(x+1)$ と $y=-x(x-3)$ は接する．

これより，

共有点の個数が 2 個となる $a$ の条件は　$1<a$

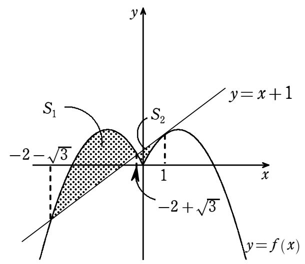
共有点の個数が 3 個となる $a$ の条件は　$a=1$

共有点の個数が 4 個となる $a$ の条件は　$0<a<1$

(4)　(3) より，$a=1$ のときだから，$y=x+1$ と $y=f(x)$ の交点の $x$ 座標を求めればよい．

- $y=x+1$ と $y=-x(x-3)$ との交点（接点）の $x$ 座標は $x=1$
- $y=x+1$ と $y=-x(x+3)$ との交点の $x$ 座標は $x=-2\pm\sqrt{3}$

よって，$C_1$ と $C_2$ の共有点の $x$ 座標は小さい順に $-2-\sqrt{3}$，$-2+\sqrt{3}$，1




図のように，$C_1$ と $C_2$ で囲まれた部分のうち，左側の部分の面積を $S_1$，右側の部分の面積を $S_2$ とすると（以下，積分計算では $\frac{1}{6}$ 公式を用いる）

$$S_1=\int_{-2-\sqrt{3}}^{-2+\sqrt{3}}\{-x(x+3)-(x+1)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(-2+\sqrt{3})-(-2-\sqrt{3})\}^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}$$

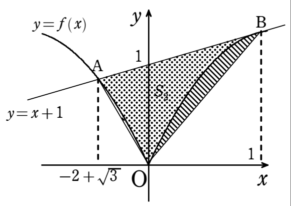
ここで，$\mathrm{A}(-2+\sqrt{3},\ f(-2+\sqrt{3}))$，$\mathrm{B}(1,\ f(1))$ とすると

$$S_2=(\triangle\mathrm{OAB}\text{の面積})-\frac{1}{6}\{0-(-2+\sqrt{3})\}^3-\frac{1}{6}(1-0)^3$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(3-\sqrt{3})-\frac{(2-\sqrt{3})^3}{6}-\frac{1}{6}$$

$$=2\sqrt{3}-3$$

よって　$S_1+S_2=6\sqrt{3}-3$




【講評】

大問 1（小問集合）

どの問題も落とせない問題である．

大問 2（図形と漸化式）

立式を落ちついてできれば，後は漸化式を解くだけの簡単な問題であり，満点を取りたい．

大問 3（二次関数と積分）

グラフを書くだけの平易な問題．(4) の面積計算がやや難しいが、確実に正解したい．

全体的に，昨年の 1 日目と比較すると，大幅に易化した．東海の入試倍率を考えると，1 次合格には数学は高得点が必要だと考えられる．ボーダーラインは85%と予想される．

二次で勝つならYMSの 二次試験対策
2/8（金） 17:45～19:15頃 東海
対策内容
二次試験の要点解説
個人面接対策
二次のポイント
東海大学の面接試験は、基本的な質問事項を中心に問われます。YMSでは合格した受験生からの貴重な情報を基に、本番に即した面接演習を行い効果的なアピール方法を指導します。
【申込方法】・一次試験合格者が対象です。
・受付開始は各大学ともに一次の結果発表以降となります。
・お電話（03-3370-0410）でご予約下さい。
申し込み受付中です。詳細はYMSホームページをご覧いただくか、お電話にてお問い合わせください。
YMS 〒151-0053 東京都渋谷区代々木 1-37-14 https://yms.ne.jp/ TEL 03-3370-0410