



1

- (1) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta - \sin \theta}{\theta^3}$ の値は である。
- (2) 複素数 z が $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ を満たすとき、 $z^{20} + \frac{1}{z^{20}}$ の値は である。
- (3) 三角形 ABC において、各辺の長さを AB=7, AC=5, BC=8 とする。A から直線 BC に行した垂線と直線 BC の交点を H とする。このとき、AH の長さは である。
- (4) $f(x) = \int_x^2 \frac{t}{\log t} dt$ ($x > 1$) に対して、 $f'(\sqrt{e})$ の値は である。
- (5) 図1は平成27年と平成29年の47都道府県ごとの人口10万人あたりの交通事故死者数の散布図である。また図2の5つの箱ひげ図には、平成27年および平成29年の47都道府県ごとの人口10万人あたりの交通事故死者数に対する箱ひげ図が含まれている。

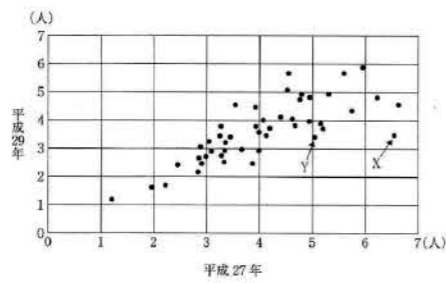


図1

(出典:「道路の交通に関する統計(交通向交通企画課)を加工して作成)

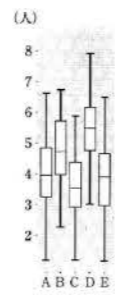


図2

- 図1と図2から読み取れる、都道府県ごとの1年間の人口10万人あたりの交通事故死者数についての記述について、正しいものは , , である。
- a. 人口10万人あたりの交通事故死者数の最大値は、平成27年の方が平成29年より大きい。
- b. 散布図の点Yの平成27年の値は、その年の人口10万人あたりの交通事故死者数の中央値である。
- c. 平成27年の箱ひげ図はAである。
- d. 平成29年の箱ひげ図はEである。
- e. 図1の点Xがある場合とない場合では、ない場合の方が相関係数の値が大きくなる。
- f. 平成27年と平成29年の人口10万人あたりの交通事故死者数には負の相関がある。

【解答】 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1 (3) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ (4) $2(e-1)\sqrt{e}$ (5) a, c, e

【解説】

(1) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta - \sin \theta}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta^3} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)$
 $= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta^3} \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}$
 $= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta^3} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \cos \theta)}$
 $= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^3} \frac{1}{\cos \theta (1 + \cos \theta)}$
 $= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta (1 + \cos \theta)}$
 $= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(2) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ より、両辺 z 倍して整理すると $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

これを解いて $z = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{6}\right)$ (複号同順)

よって $z^{20} + \frac{1}{z^{20}} = z^{20} + z^{-20}$

$= \cos\left(\pm \frac{10}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm \frac{10}{3}\pi\right) + \cos\left(\mp \frac{10}{3}\pi\right) + i \sin\left(\mp \frac{10}{3}\pi\right)$ (複号同順)
 $= 2 \cos \frac{10}{3}\pi$

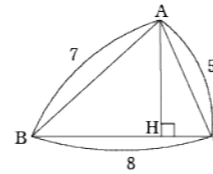
$= 2 \cos \frac{4}{3}\pi$
 $= -1$

(3) 余弦定理より

$\cos A = \frac{49 + 25 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{1}{7} \therefore \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\therefore (\triangle ABC \text{の面積}) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \sin A = 10\sqrt{3}$

$\therefore 8 \times AH \times \frac{1}{2} = 10\sqrt{3} \therefore AH = \frac{5}{2}\sqrt{3}$



【補足】

$\cos C = \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2} \therefore C = 60^\circ \therefore AH = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

(4) $f(x) = \int_x^2 \frac{t}{\log t} dt$ において、 $g(t) = \frac{t}{\log t}$ とし、 $g(t)$ の原始関数の1つを $G(t)$ とすると

$f(x) = [G(t)]_x^2 = G(x^2) - G(x)$

$\therefore f'(x) = g(x^2) \cdot 2x - g(x)$

$= \frac{x^2}{\log x^2} \cdot 2x - \frac{x}{\log x}$
 $= \frac{x^3 - x}{\log x}$

$\therefore f'(\sqrt{e}) = \frac{e\sqrt{e} - \sqrt{e}}{\frac{1}{2}} = 2(e-1)\sqrt{e}$

(5) b: 点Yの数字は平成27年において、9番目に大きい数字だから、中央値にはならない。

d: 平成29年の散布図で、最大値は6を超えているので箱ひげ図はEではない。

f: 散布図では、正の相関が見られるので正しくない。

2

xy平面において、点 $(0, \frac{1}{3})$ を中心とし、x軸に接する円を C_0 とする。

(1) 円 C_0 と $x > 0$ の範囲で外接し、かつx軸にも接する円の中心の座標を (p, q) とする。 q を p で表すと $q = \frac{1}{3} + p$ である。

(2) 円 C_1 は中心のx座標が $a_1 = 1$ であり、 $x > 0$ の範囲で C_0 に外接し、かつx軸に接する。また円 C_2 は中心のx座標が a_2 であり、 C_0, C_1 の両方に外接し、かつ $x > 0$ の範囲でx軸に接する。

以下、 $n = 3, 4, \dots$ に対して、中心のx座標が a_n であり、 C_0 と C_{n-1} の両方に外接し、かつx軸に接する円を C_n とする。ただし、 C_n と C_{n-2} は異なる。このとき、 C_n の半径を a_n を用いて表すと であり、 a_n と a_{n+1} との間には

$(a_n - a_{n+1})^2 = \frac{1}{4} a_{n+1}^2 a_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$

が成立する。したがって、 a_{n+1} を a_n を用いて表すと、 $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ である。このようにして定まる数列 $\{a_n\}$ において $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。このとき b_{n+1} を b_n を用いて表すと $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$ である。したがって数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \frac{1}{2^n}$ である。

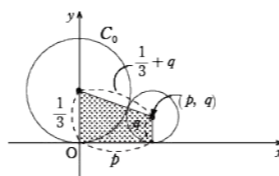
(3) C_n の面積を S_n とするとき、 $S_n = \frac{1}{4} \pi a_n^2$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 S_n$ の値は である。

【解答】 (1) ア: $\frac{3}{4}p^2$ (2) イ: $\frac{3}{4}a_n^2$ ウ: $\frac{9}{4}$ エ: $\frac{2a_n}{3a_n+2}$ オ: $b_n + \frac{3}{2}$ カ: $\frac{2}{3n-1}$

(3) キ: $\frac{9\pi}{(3n-1)^4}$ ク: $\frac{\pi}{9}$

【解説】

(1)

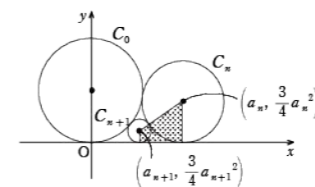


$q > 0$ であり、図の斜線部分の台形に注目して、三平方の定理を考えると

$(q + \frac{1}{3})^2 = p^2 + (q - \frac{1}{3})^2 \Leftrightarrow q^2 + \frac{2}{3}q + \frac{1}{9} = p^2 + q^2 - \frac{2}{3}q + \frac{1}{9}$

$\therefore q = \frac{3}{4}p^2$

(2)



C_n と C_{n+1} の位置関係は上図のようになる。斜線部分の台形に注目して、三平方の定理を考える。

(1) の結果から、 C_n の半径は $\frac{3}{4}a_n^2$ 、 C_{n+1} の半径は $\frac{3}{4}a_{n+1}^2$ であるから、

$(\frac{3}{4}a_n^2 + \frac{3}{4}a_{n+1}^2)^2 = (\frac{3}{4}a_n^2 - \frac{3}{4}a_{n+1}^2)^2 + (a_n - a_{n+1})^2$

$\Leftrightarrow \frac{9}{8}a_n^2 a_{n+1}^2 = -\frac{9}{8}a_n^2 a_{n+1}^2 + (a_n - a_{n+1})^2$

$\Leftrightarrow (a_n - a_{n+1})^2 = \frac{9}{4}a_n^2 a_{n+1}^2$

$a_n > a_{n+1} > 0$ であるから、 $a_n - a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n a_{n+1}$

$\therefore a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 2} \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2}$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、 $b_{n+1} = b_n + \frac{3}{2}$ ($b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$)

数列 $\{b_n\}$ は初項1、公差 $\frac{3}{2}$ の等差数列なので、 $b_n = \frac{3}{2}(n-1) + 1 = \frac{3n-1}{2}$

これより、 $a_n = \frac{2}{3n-1}$

(3) 円 C_n の半径は $\frac{3}{4}a_n^2$ であるから、 $S_n = \pi \left(\frac{3}{4}a_n^2\right)^2 = \frac{9a_n^4}{16} \pi = \frac{9\pi}{(3n-1)^4}$

これより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 9\pi \left(\frac{n}{3n-1}\right)^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} 9\pi \left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^4 = \frac{\pi}{9}$

3

2つの関数

$f(x) = -|x(|x-3)|$, $g(x) = a(x+1)$

を考える。ただし $a > 0$ とする。 $y = f(x)$ のグラフを C_1 、 $y = g(x)$ のグラフを C_2 とする。

(1) C_1 と x 軸との共有点は全部で 個である。

(2) C_2 が a の値によらず必ず通る点の座標は , である。

(3) C_1 と C_2 の共有点の個数が2個となる a の条件は であり、3個となる a の条件は であり、4個となる a の条件は である。

(4) C_1 と C_2 が接点をもつとき、 C_1 と C_2 の共有点のx座標は小さい順に , , である。さらに、このとき C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積は である。

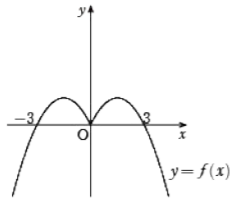
【解答】 (1) ア: 3 (2) イ: -1 ウ: 0 (3) エ: $1 < a$ オ: $a = 1$ カ: $0 < a < 1$

(4) キ: $-2 - \sqrt{3}$ ク: $-2 + \sqrt{3}$ ケ: 1 コ: $6\sqrt{3} - 3$

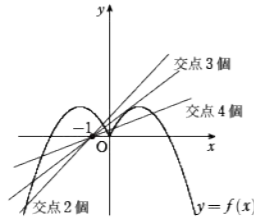
【解説】

$f(x) = \begin{cases} -x(x-3) & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ -x(x+3) & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

であるから、 $y = f(x)$ のグラフを書くと、以下のようなになる。



- (1) グラフより、 x 軸との共有点は全部で3個である。
 (2) $x = -1$ を $y = a(x+1)$ に代入すると、 $y = 0$ となる。よって、 a の値によらず $y = a(x+1)$ は必ず $(-1, 0)$ を通る。
 (3)



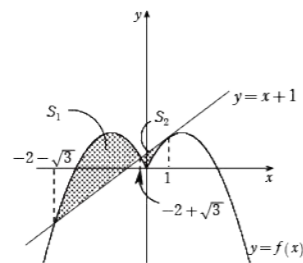
図のように、 $a > 0$ において、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が接するとき、交点が3個になるときであり、そのときの a の値よりも a が大きければ交点は2個となり、小さければ交点は4個となる。

つまり、 $x > 0$ において、 $y = a(x+1)$ と $y = -x(x-3)$ が接する a の値を求めると、
 $a(x+1) = -x(x-3) \Leftrightarrow x^2 + (a-3)x + a = 0$
 この判別式を D とすると、 $D=0$ から $(a-3)^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-9) = 0$
 図から、 $a=1$ のときに $x > 0$ で $y = a(x+1)$ と $y = -x(x-3)$ は接する。

- これより、
 共有点の個数が2個となる a の条件は $1 < a$
 共有点の個数が3個となる a の条件は $a = 1$
 共有点の個数が4個となる a の条件は $0 < a < 1$

- (4) (3)より、 $a=1$ のときだから、 $y = x+1$ と $y = f(x)$ の交点の x 座標を求めればよい。

- $y = x+1$ と $y = -x(x-3)$ との交点(接点)の x 座標は $x=1$
 - $y = x+1$ と $y = -x(x+3)$ との交点の x 座標は $x = -2 \pm \sqrt{3}$
- よって、 C_1 と C_2 の共有点の x 座標は小さい順に $-2 - \sqrt{3}$ 、 $-2 + \sqrt{3}$ 、 1



図のように、 C_1 と C_2 で囲まれた部分のうち、左側の部分の面積を S_1 、右側の部分の面積を S_2 とすると(以下、積分計算では $\frac{1}{6}$ 公式を用いる)

$$S_1 = \int_{-2-\sqrt{3}}^{-2+\sqrt{3}} \{-x(x+3) - (x+1)\} dx$$

$$= \frac{1}{6} \{(-2+\sqrt{3})^2 - (-2-\sqrt{3})^2\}$$

$$= \frac{1}{6} (2\sqrt{3})^2 = 4\sqrt{3}$$

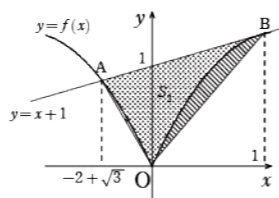
ここで、 $A(-2+\sqrt{3}, f(-2+\sqrt{3}))$ 、 $B(1, f(1))$ とすると

$$S_2 = (\triangle OAB \text{の面積}) - \frac{1}{6} \{0 - (-2+\sqrt{3})\}^2 - \frac{1}{6} (1-0)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3-\sqrt{3}) - \frac{(2-\sqrt{3})^2}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= 2\sqrt{3} - 3$$

よって $S_1 + S_2 = 6\sqrt{3} - 3$



【講評】
 大問1 (小問集合)
 どの問題も落とせない問題である。
 大問2 (図形と漸化式)
 立式を落ちついてできれば、後は漸化式を解くだけの簡単な問題であり、満点を取りたい。
 大問3 (二次関数と積分)
 グラフを書くだけの平易な問題。(4)の面積計算がやや難しいが、確実に正解したい。
 全体的に、昨年と1日目と比較すると、大幅に易化した。東海の入試倍率を考えると、1次合格には数学は高得点が必要だと考えられる。ボーダーラインは85%と予想される。

二次で勝つならYMSの二次試験対策

2/8金
17:45 ~ 19:15頃
東海

対策内容

二次試験の要点解説
 個人面接対策

二次のポイント

東海大学の面接試験は、基本的な質問事項を中心に問われます。YMSでは合格した受験生からの貴重な情報を基に、本番に即した面接演習を行い効果的なアピール方法を指導します。
 【申込方法】・一次試験合格者が対象です。
 ・受付開始は各大学ともに一次の結果発表以降となります。
 ・お電話(03-3370-0410)でご予約下さい。

申し込み受付中です。詳細はYMSホームページをご覧ください。お電話にてお問い合わせください。