1

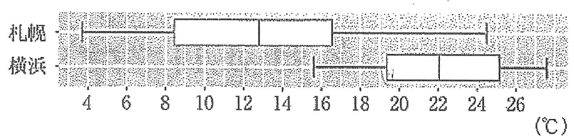
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) 円に内接する四角形 ABCD が与えられている. 各辺の長さが AB$=4$, BC$=4$, CD$=3$, DA$=5$ を満たすとき, 線分 BD の長さは $\boxed{\text{イ}}$ である. また四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{99} n\,!$ の一の位の数字は $\boxed{\text{エ}}$ である.

(4) 四面体 OABC において, OA$=$OB$=$OC$=\sqrt{2}$, AB$=$CA$=\sqrt{3}$ とする. 三角形 ABC の重心を G とするとき, 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(5) 下の図は, 2018 年 4 月の 30 日間の札幌と横浜における各日ごとの最高気温についての箱ひげ図である.



(出典：「過去の気象データ」(気象庁) を加工して作成)

以下の a から f の記述のうち, これらの箱ひげ図から読み取れる正しいものは $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ である.

a. 札幌では最高気温が 15℃ を超えた日が 15 日以上であった.
b. 横浜では最高気温が 25℃ を超えた日が 7 日以上であった.
c. 最高気温の中央値は, 横浜の方が札幌よりも 10℃ 以上高い.
d. 札幌の最高気温の四分位範囲は, 10℃ 以下である.
e. 最高気温の四分位範囲は, 横浜の方が札幌よりも小さい.
f. 最高気温について, 札幌の第 3 四分位数は, 横浜の第 1 四分位数よりも 5℃ 以上低い.

解答 (1) $\dfrac{2}{3}$　(2) BD$=\sqrt{31}$, 面積 : $4\sqrt{15}$　(3) 3　(4) 1　(5) b, d, e

【解説】

(1) $\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\cdot1^0=\frac{2}{3}$

(2) BD$=x$, $\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とおく. △ABD, △BCD に余弦定理を用いて,

$$x^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos\theta=41-40\cos\theta$$

$$x^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cos(\pi-\theta)=25+24\cos\theta$$

したがって,

$$41-40\cos\theta=25+24\cos\theta \iff \cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{BD}=x=\sqrt{41-40\cdot\frac{1}{4}}=\sqrt{31}$$

また, 四角形 ABCD の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(4\cdot5+4\cdot3)\sin\theta=16\sqrt{1-\cos^2\theta}=4\sqrt{15}$$

(3) $5!=120$ より, $n\geqq5$ のとき $n\,!$ の一の位の数字はつねに 0 となる.

$1!+2!+3!+4!=33$ より, $\displaystyle\sum_{n=1}^{99}n\,!$ の一の位の数字は 3 である.

(4) $$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

$$=\frac{2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\quad\cdots①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より,

$$3=2+2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}$$

また, △OAB≡△OAC より, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから,

$$①=\frac{2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{2+2\cdot\frac{1}{2}}{3}=1$$

(5) a. 中央値が約 13 であるから, 15 ℃を超えた日が 15 日以上あるとは言いきれない.
b. 第 3 四分位数が25 ℃を僅かに超えているので, 25 ℃を超えた日は 7 日以上ある.
c. 最高気温の中央値を比較すると, 横浜の方が札幌よりも高いが, 差は 10 ℃未満である.
d. 札幌の最高気温の四分位範囲は, 10 ℃以下である.
e. 最高気温の四分位範囲は, 横浜の方が札幌よりも小さい.
f. 札幌の第 3 四分位数は, 横浜の第 1 四分位数よりも 4 ℃程度低いので誤り.

したがって, 正しいものは, b, d, e である.

【補足】解答は 2 つのみなので, 恐らく出題ミスと考えられる.

気象庁の過去のデータによると, 横浜の最高気温の第 3 四分位数は 4 月 29 日の 25.2 ℃であり, 25 ℃を超える日が 8 日ある.

2

$x>0$ とする. 曲線 C_1 と曲線 C_2 を次のように定める.

$$C_1 : y=\frac{1}{x},\qquad C_2 : y=-\frac{x-2}{x-1}$$

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線を l_1, l_2 とするとき, これらの方程式は,

$l_1 : y=\boxed{\text{ア}}$,　$l_2 : y=\boxed{\text{イ}}$

である. ただし, l_1 の傾きを a_1, l_2 の傾きを a_2 と表すとき, $a_1>a_2$ とする.

(2) C_1 と C_2 の交点の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ であり, この交点を通り l_2 と直交する直線の方程式は, $y=\boxed{\text{オ}}$ である. また, C_2 と l_1 の接点の座標は $\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ である.

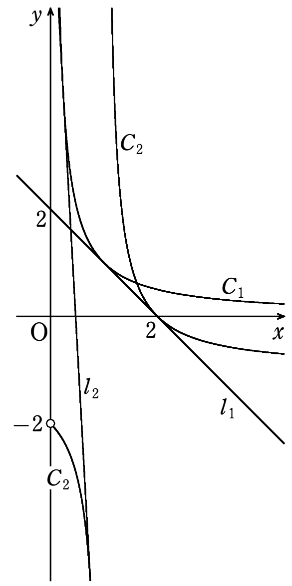
(3) C_1 と C_2 および l_1 によって囲まれる図形の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である.

解答 (1) $l_1 : y=-x+2$, $l_2 : y=-(9+4\sqrt{5})x+4+2\sqrt{5}$

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $y=(9-4\sqrt{5})x+5-2\sqrt{5}$, $(2,\ 0)$

(3) $\log\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-2$

【解説】



(1) $C_1 : y=\dfrac{1}{x}$ について, $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

C_1 上の点 $(s,\ t)$ (s, t は正で $st=1$) における接線の方程式を,

$$y=-\frac{1}{s^2}(x-s)+t$$

とおくと, $s=\dfrac{1}{t}$ より,

$$y=-t^2\left(x-\frac{1}{t}\right)+t$$

$$\iff y=-t^2x+2t\quad\cdots①$$

① を $C_2 : y=-\dfrac{x-2}{x-1}$ に代入して,

$$-t^2x+2t=-\frac{x-2}{x-1}$$

分母を払って整理すると,

$$t^2x^2-(t+1)^2x+2(t+1)=0\quad\cdots②$$

この方程式が重解を持てばよいから,

$$(t+1)^4-8t^2(t+1)=0$$

$$\iff (t+1)(t-1)(t^2-4t-1)=0$$

$t>0$ より $t=1$, $2+\sqrt{5}$ であり, これらを ① に代入して,

$$l_1 : y=-x+2,\qquad l_2 : y=-(9+4\sqrt{5})x+4+2\sqrt{5}$$

(2) C_1, C_2 の式から y を消去して,

$$\frac{1}{x}=-\frac{x-2}{x-1} \iff x^2-x-1=0$$

$x>0$ より $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり, このとき $y=\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

したがって, C_1 と C_2 の交点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

この交点を通り l_2 と直交する直線の方程式は,

$$y=\frac{1}{9+4\sqrt{5}}\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}-1}{2} \iff y=(9-4\sqrt{5})x+5-2\sqrt{5}$$

また, C_2 と l_1 の接点の x 座標は, ② で $t=1$ として得られる 2 次方程式の重解であり,

$$x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0 \iff x=2$$

$y=-\dfrac{x-2}{x-1}=0$ より, 接点の座標は $(2,\ 0)$

(3) $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ とおく. $C_2 : y=\dfrac{1}{x-1}-1$ より, 求める面積 S は,

$$S=\int_1^\alpha\frac{1}{x}dx+\int_\alpha^2\left(\frac{1}{x-1}-1\right)dx-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$

$$=\Big[\log x\Big]_1^\alpha+\Big[\log(x-1)-x\Big]_\alpha^2-\frac{1}{2}=\log\alpha-\log(\alpha-1)-2+\alpha-\frac{1}{2}$$

$$=\log\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-2$$

3

複素数 α に対応する複素数平面上の点を $\mathrm{A}(\alpha)$ と書く．動点 P が次の規則で複素数平面上を移動する．

- 時刻 0 のとき，P は $\mathrm{A}(1)$ に存在する．
- t は 0 以上の整数とする．時刻 t のときに P が $\mathrm{A}(\alpha)$ に存在する場合，時刻 $t+1$ では P は確率 p で $\mathrm{A}(2\alpha)$ に存在し，確率 $1-p$ で $\mathrm{A}((1+i)\alpha)$ に存在する．

(1)　$\mathrm{A}(-2)$，$\mathrm{A}(-4)$，$\mathrm{A}(2i)$，$\mathrm{A}(-4i)$，$\mathrm{A}(2+2i)$，$\mathrm{A}(2-2i)$ のうち，P が決して到達できない点は $\boxed{\text{ア}}$ である．ただし $\boxed{\text{ア}}$ には該当する点を全て書け．

(2)　時刻 2 のときに P が $\mathrm{A}(2+2i)$ に存在する確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3)　時刻 5 のときに P が $\mathrm{A}(-8)$ に存在する確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4)　時刻 t のときに P が実軸の正の部分に存在する確率を $R(t)$ とする．このとき $R(8)=\boxed{\text{エ}}$，$R(9)=\boxed{\text{オ}}$，$R(16)=\boxed{\text{カ}}$ が成り立つ．

(5)　時刻 2019 のとき，P が実軸の正の部分の点 $\mathrm{A}(r)$ に存在する．このような r のうち最大のものは 2 の $\boxed{\text{キ}}$ 乗である．最小のものは 2 の $\boxed{\text{ク}}$ 乗である．

解答　(1)　ア：$\mathrm{A}(-2)$，$\mathrm{A}(-4i)$，$\mathrm{A}(2-2i)$　　(2)　イ：$2p(1-p)$　　(3)　ウ：$5p(1-p)^4$

(4)　エ：$p^8+(1-p)^8$，オ：$p^9+9p(1-p)^8$，カ：$p^{16}+12870p^8(1-p)^8+(1-p)^{16}$

(5)　キ：2019，ク：1011

【解説】

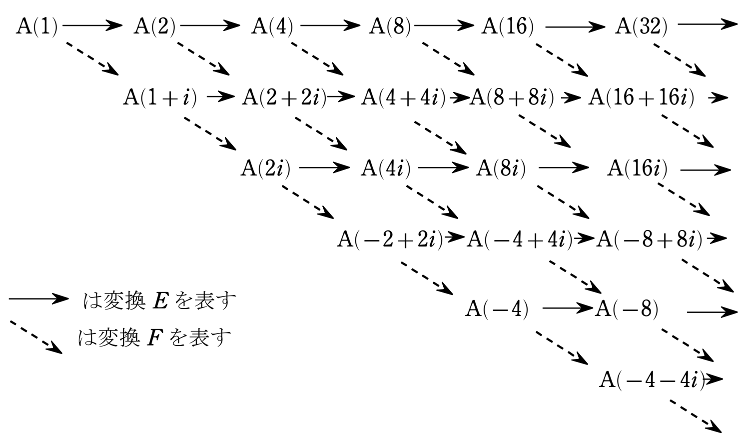
時刻 t に点 $\mathrm{A}(\alpha)$ にあった点は，時刻 $t+1$ において

E：原点中心に 2 倍の位置に存在する

F：原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，$\sqrt{2}$ 倍の位置 に存在する

のいずれかである．この 2 つの移動 (変換) は，交換法則が成り立つ．例えば，点 $\mathrm{A}(1)$ について変換 $[E,\ F]$ によって点 $\mathrm{A}(2+2i)$ に移るが，変換 $[F,\ E]$ によっても点 $\mathrm{A}(2+2i)$ に移る．

次に，具体的に点 $\mathrm{A}(1)$ の移動を考えてみると，

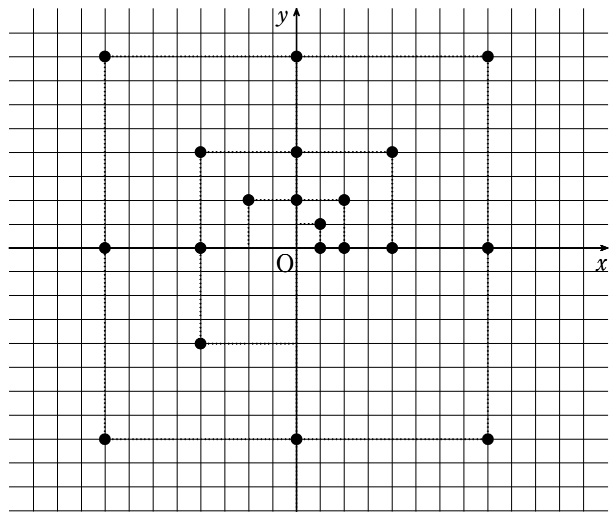


のように点が移動することがわかる．つまり点は

$\mathrm{A}(2^{k-1})$，$\mathrm{A}(2^{k-1}(1+i))$，$\mathrm{A}(2^k i)$，$\mathrm{A}(2^k(-1+i))$，

$\mathrm{A}(-2^{k+1})$，$\mathrm{A}(2^{k+1}(-1-i))$，$\mathrm{A}(-2^{k+2}i)$，$\mathrm{A}(2^{k+2}(1-i))$

のいずれかにあることがわかる．



(1)　P が決して到達できない点は，

$\mathrm{A}(-2)$，$\mathrm{A}(-4i)$，$\mathrm{A}(2-2i)$

である．

(2)　時刻 2 のときに P が $\mathrm{A}(2+2i)$ に存在するのは，変換 E が 1 回，F が 1 回行われたときなので，

$${}_2\mathrm{C}_1\cdot p\cdot(1-p)=2p(1-p)$$

(3)　時刻 5 のときに P が $\mathrm{A}(-8)$ に存在するのは，変換 E が 1 回，F が 4 回行われたときであるから，

$${}_5\mathrm{C}_1\cdot p\cdot(1-p)^4=5p(1-p)^4$$

(4)　時刻 t のときに P が実軸の正の部分に存在するのは，変換 F が $8k$ 回 (k は整数) 行われたときである．

時刻 8 のときに P が実軸の正の部分に存在するのは，変換 E が 8 回，または変換 F が 8 回行われたときであるから，

$$R(8)=p^8+(1-p)^8$$

同様に考えて，

$$R(9)=p^9+{}_9\mathrm{C}_1p(1-p)^8=p^9+9p(1-p)^8$$

$$R(16)=p^{16}+{}_{16}\mathrm{C}_8p^8(1-p)^8+(1-p)^{16}=p^{16}+12870p^8(1-p)^8+(1-p)^{16}$$

(5)　(4) と同様に考える．r が最大となるのは，変換 E が 2019 回行われたときなので $r=2^{2019}$ となる．また，r だ最小となるのは，変換 F が $\left[\dfrac{2019}{8}\right]\cdot 8=2016$ 回行われるときである．したがって，$r=2^3\cdot(\sqrt{2})^{2016}=2^{1011}$ となる．

【講評】

1

どれも落とせない問題．(5) は正しいものが 3 つあるので，いずれか 2 つを入れればよいだろう．

2

計算が煩雑になり，差がつくとしたらこの問題か．時間は十分にあるセットだったので，ここにしっかり時間をかければ得点できたと思う．

3

複素数平面がテーマのようだが，すこし具体的に書き上げれば，反復試行の問題とわかる．問題を正確に分析する力が試された．

1 日目と同様に昨年より易化しており高得点勝負になるだろう．

予想ボーダーラインは 75%程度．