I $\boxed{\quad}$ に適する解答をマークせよ．ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{\quad}$ がある場合は同一の値がはいる．

(1)(a)　$z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$，$w=z+z^2+z^4$ とする．

$w+\overline{w}=\boxed{\text{アイ}}$，$w\cdot\overline{w}=\boxed{\text{ウ}}$ より

$$\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}},$$

$$\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi+\sin\frac{8}{7}\pi=\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$ を得る．

(b)　$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ とすると $|\alpha+\beta|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ (ただし $\boxed{\text{シ}}>\boxed{\text{ス}}$) となる．

γ の実部が正で α，β，γ が複素数平面上で正三角形となるとき，

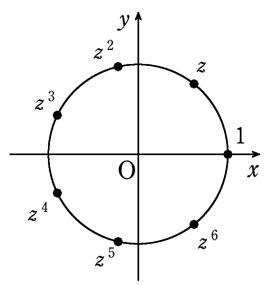
$\gamma=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}+\dfrac{\boxed{\text{ツ}}+\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}i$ である．

解答　(1)(a)　$w+\overline{w}=-1$，$w\cdot\overline{w}=2$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(b)　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$\gamma=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$

【解説】

(1)(a)　$z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$，$w=z+z^2+z^4$　…① とする．



$|z|=1$ より　$z\overline{z}=1 \iff \overline{z}=\dfrac{1}{z}$　…②

また $z^7=1$　…③ であり，$z\neq 1$ より　$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$　…④

$$\begin{aligned}\overline{w}&=\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}\\&=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\quad(\text{② より})\\&=z^6+z^5+z^3\quad\cdots⑤\quad(\text{③ をかけて})\end{aligned}$$

①，④，⑤ より

$$\begin{aligned}w+\overline{w}&=(z+z^2+z^4)+(z^6+z^5+z^3)\\&=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1-1\\&=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w\cdot\overline{w}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7\\&=3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=2\end{aligned}$$

よって　w，$\overline{w}$ を解に持つ 2 次方程式は解と係数の関係より

$$t^2+t+2=0 \iff t=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

$w=z+z^2+z^4$ において　$\sin\dfrac{4}{7}\pi>\sin\dfrac{6}{7}\pi$　なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(w)&=\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi+\sin\frac{8}{7}\pi\\&=\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi-\sin\frac{6}{7}\pi>0\end{aligned}$$

であるから，

$$w=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$$

したがって

$$\mathrm{Re}(w)=\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi=-\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Im}(w)=\sin\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{4}{7}\pi+\sin\frac{8}{7}\pi=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

(b)　$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ とすると

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|&=\left|\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right|\\&=\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right|\cdot|1-i|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|&=|\beta-\alpha|=\left|\frac{\sqrt{3}-i}{2}-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right|\\&=\left|\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right|=\left|\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right|\cdot|1-i|\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

また，α，β，γ が複素数平面上で正三角形となるとき，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(\pm 60^\circ)+\sin(\pm 60^\circ)=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\begin{aligned}\gamma-\alpha&=(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1-i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=\pm\frac{2+\sqrt{3}}{2}\mp\frac{1}{2}i\quad(\text{複号同順})\end{aligned}$$

$$\gamma=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\quad\text{または}\quad -1-i$$

実部が正のものだから

$$\gamma=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　1 から 8 までの 8 個の数から異なる数を選んで並べることにより 2 桁以上 4 桁以下の正の整数をつくる．このようにしてつくられた正の整数の集合を A とする．A の要素であり，どの 2 つの桁の和も 9 にならない数からなる集合を A_1 とする．A の要素であり，3 桁以下の数でどの 2 つの桁の和も 9 にならない数からなる集合を A_2 とする．

1)　$x\in A_1$ であることは，$x\in A_2$ であることの $\boxed{\text{ア}}$.

2)　A の要素の個数は $\boxed{\text{イウエオ}}$ 個である．

3)　A_1 の要素の個数は $\boxed{\text{カキク}}$ 個であり，A_2 の要素の個数は $\boxed{\text{ケコサ}}$ 個である．

4)　A の要素で小さい方から数えて 600 番目の数は $\boxed{\text{シスセソ}}$ である．

ただし，$\boxed{\text{ア}}$ は以下の中から選択せよ．

(a)　必要条件であるが，十分条件ではない

(b)　十分条件であるが，必要条件ではない

(c)　必要十分条件である

(d)　必要条件でも，十分条件でもない

解答　1)　(a)　2)　2072 通り　3)　624 通り，240 通り　4)　1874

【解説】

(2)

1)　$x\in A_1 \Longrightarrow x\in A_2$　は偽

(反例は A の要素で 4 桁のもの)

$x\in A_2 \Longrightarrow x\in A_1$　は真

であるから $x\in A_1$ であることは $x\in A_2$ であるための必要条件であるが十分条件でない．

したがって，(a)

2)　A の要素の個数は 1～8 の 8 個の数を順に並べて

4 桁のもの：$8\times 7\times 6\times 5=1680$

3 桁のもの：$8\times 7\times 6=336$

2 桁のもの：$8\times 7=56$

だから，すべてを足すと 2072 通り．これが A の要素の個数である．

3)　1 から 8 までの 8 個の数から異なる数を選んで並べ，2 桁以上，4 桁以上の正の整数をつくるとき，ある数 N を並べると，次に並べる数は，N と $9-N$ を除く 6 通り，以下同様に 2 種類ずつ並べることができる数が減っていくので，

4 桁のもの：$8\times 6\times 4\times 2=384$

3 桁のもの：$8\times 6\times 4=192$

2 桁のもの：$8\times 6=48$

だから，すべて足して 624 通り．これが A_1 の要素の個数である．

また，A_2 は 2 桁，3 桁のものを足して 240 通り．これが A_2 の要素の個数である．

4)　A の要素で小さい方から数えて 600 番目のものは，

2 桁の数：56通り

3 桁の数：336 通り

4 桁で千の位が 1 のもの…$7\times 6\times 5=210$ 通り

これらの和が 602 通りである．つまり，千の位が 1 のもののうち，大きい方から 3 番目のものを考えればよい．

1876，1875，1874，…

となるので求める数は　1874.

(3) 下図は

$$\begin{cases} x=\sin 8\theta \\ y=\sin 6\theta \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

であらわされるリサージュ曲線 L で，下図の実線部分は点 A (0, 1) を通る曲線 L の一部である．また，点 B(0, β) ($-1<\beta<0$) は L 上の点である．

点 A では $\theta=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ であり，B では小さい順に $\theta=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$, $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ で，

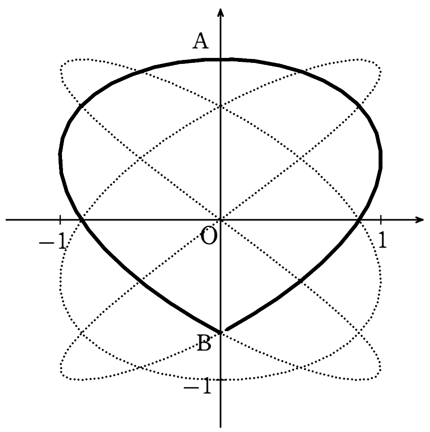
$\beta=\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

実線で囲まれた図形のうち $x\geqq0$ となる部分の面積は，$x(\theta)=\sin 8\theta$, $y(\theta)=\sin 6\theta$ とすると

$$\int_\beta^1 xdy=\int_b^t \boxed{\text{コ}}(\sin\boxed{\text{サ}}\theta+\sin\boxed{\text{シス}}\theta)d\theta$$

と表すことができる．ここで，$b=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi$, $t=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である．

よって実線で囲まれた図形全体の面積は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ となる．



解答 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$, $\theta=\dfrac{5}{8}\pi$, $\dfrac{7}{8}\pi$, $\beta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, $\displaystyle\int_b^t 3(\sin 2\theta+\sin 14\theta)d\theta$, $b=\dfrac{7}{8}\pi$, $\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$

【解説】

(3) $\quad \mathrm{L}:\begin{cases} x=\sin 8\theta & \cdots① \\ y=\sin 6\theta & \cdots② \end{cases} \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$

① より，$x=0$ となるのは

$$\theta=0,\ \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \pi$$

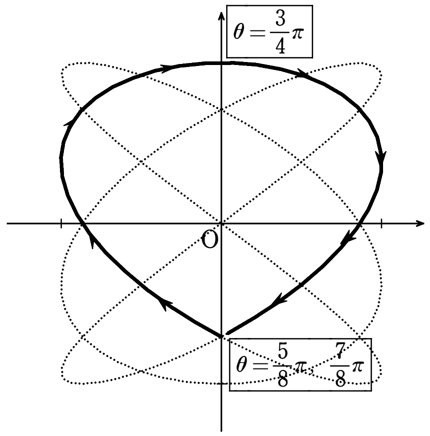
このとき，② よりこれに対応する y の値は順に

$$0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0$$

となる．したがって，点 A(0, 1) となるのは $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ であり，B(0, β) ($-1<\beta<0$) は

$\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり，このときの θ は小さい順に $\theta=\dfrac{5}{8}\pi$, $\dfrac{7}{8}\pi$ である．

また，実線で囲まれた図形のうち $x\geqq0$ となる部分の面積 S は点 ($x(\theta)$, $y(\theta)$) が図のように進行することから，



$$S=\int_{y=\beta}^{y=1} xdy$$

$$=\int_{\theta=\frac{7}{8}\pi}^{\theta=\frac{3}{4}\pi} x(\theta)\cdot\frac{dy}{d\theta}d\theta$$

ここで，$x(\theta)=\sin 8\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=6\cdot\cos 6\theta$

だから，

$$S=\int_{\theta=\frac{7}{8}\pi}^{\theta=\frac{3}{4}\pi} 6\sin 8\theta\cos 6\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=\frac{7}{8}\pi}^{\theta=\frac{3}{4}\pi} 3(\sin 14\theta+\sin 2\theta)d\theta$$

$$=\left[-\frac{3}{14}\cos 14\theta-\frac{3}{2}\cos 2\theta\right]_{\theta=\frac{7}{8}\pi}^{\theta=\frac{3}{4}\pi}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}}{7}$$

よって実線で囲まれた図形全体の面積は，対称性に注意して，

$$2S=\frac{12\sqrt{2}}{7}$$

II $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ．ただし，同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる．

関数 $f(x)$ を用いて漸化式が $x_{n+1}=f(x_n)$ ($n=1, 2, \cdots$) で与えられる数列 $\{x_n\}$ について考える．

(1) $x_1=3$, $f(x)=\dfrac{3}{4}x+3$ とすると $x_2=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$, $x_3=\dfrac{\boxed{\text{エオカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ となり，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x_n=\boxed{\text{ケコ}}$ となる．

(2) $x_1=3$, $f(x)=\dfrac{3}{4}[x]+3$ とすると $x_2=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$, $x_3=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ となる．ただし，実数 a に対して $[a]$ は a を超えない最大の整数とする．

(3) $x_1=\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\dfrac{3x}{1+x}$ とすると，$x_5=\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$, $x_9=\dfrac{\boxed{\text{ナニヌネ}}}{\boxed{\text{ノハヒフ}}}$ となり，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=\boxed{\text{ヘ}}$ となる．

(4) $f(x)=ax(1-x)$ (a は実数) とする．$0\leqq x_1\leqq1$ を満たすすべての x_1 に対して $0\leqq x_n\leqq1$ ($n=2, 3, \cdots$) が成り立つための必要十分条件は $\boxed{\text{ホ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{マ}}$ である．このうちで $x_1=x_2$ となる 0 以外の x_1 が存在するのは $\boxed{\text{ミ}}<a\leqq\boxed{\text{マ}}$ のときで，このような x_1 は a を用いて $x_1=\boxed{\text{ム}}-\dfrac{\boxed{\text{メ}}}{a}$ と表わされる．同様に $x_1<x_2$, $x_3=x_1$ を満たす x_1 が存在するのは $\boxed{\text{モ}}<a\leqq\boxed{\text{マ}}$ のときで，x_1 は a を用いて

$x_1=\dfrac{a+\boxed{\text{ヤ}}-\sqrt{(a+\boxed{\text{ユ}})(a-\boxed{\text{ヨ}})}}{2a}$ と表される．

解答 (1) $x_2=\dfrac{21}{4}$, $x_3=\dfrac{111}{16}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=12$ (2) $x_2=\dfrac{21}{4}$, $x_3=\dfrac{27}{4}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=\dfrac{39}{4}$

(3) $x_5=\dfrac{27}{14}$, $x_9=\dfrac{2187}{1094}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=2$

(4) $0\leqq a\leqq4$, $1<a\leqq4$, $1-\dfrac{1}{a}$, $3<a\leqq4$, $\dfrac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$

【解説】

(1) $x_{n+1}=f(x_n)$ ($n=1, 2, \cdots$) で与えられる数列 $\{x_n\}$ に対し，

$x_1=3$, $f(x)=\dfrac{3}{4}x+3$ のとき

$$x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+3 \iff x_{n+1}-12=\frac{3}{4}(x_n-12)$$

と変形できるから，一般項は

$$x_n-12=(x_1-12)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$x_n=12-9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

と求まる．よって，

$$x_2=\frac{21}{4},\quad x_3=\frac{111}{16},\quad \lim_{n\to\infty}x_n=12.$$

(2) $x_1=3$, $f(x)=\frac{3}{4}[x_n]+3$ のとき

$$x_{n+1}=\frac{3}{4}[x_n]+3$$

となるので,

$$x_2=\frac{3}{4}[x_1]+3=\frac{3}{4}\cdot[3]+3=\frac{21}{4},\qquad x_3=\frac{3}{4}[x_2]+3=\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{21}{4}\right]+3=\frac{27}{4}$$

となる. さらに続けると,

$$x_4=\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{27}{4}\right]+3=\frac{3}{4}\cdot 6+3=\frac{15}{2},\quad x_5=\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{15}{2}\right]+3=\frac{3}{4}\cdot 7+3=\frac{33}{4}$$

$$x_6=\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{33}{4}\right]+3=\frac{3}{4}\cdot 8+3=9,\quad x_7=\frac{3}{4}\cdot[9]+3=\frac{3}{4}\cdot 9+3=\frac{39}{4}$$

$$x_8=\frac{3}{4}\cdot\left[\frac{39}{4}\right]+3=\frac{3}{4}\cdot 9+3=\frac{39}{4}$$

となるので, $x_n\ (n\geqq 7)$ 以降, この数列は $x_n=\frac{39}{4}$ となる. したがって,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{39}{4}$$

(3) $x_1=\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{3x}{1+x}$ のとき

$$x_{n+1}=\frac{3x_n}{1+x_n}$$

ここで, 帰納的に $x_n\neq 0$ であるから, この漸化式の両辺の逆数をとると,

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x_n}+\frac{1}{3}\iff\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\right)$$

と変形できる. 数列 $\left\{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\right\}$ が初項 $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, 公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列をなすことがわかるので, 一般項は

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\iff x_n=\frac{2}{3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+1}$$

と求まる. したがって,

$$x_5=\frac{27}{14},\quad x_9=\frac{2187}{1094},\quad \lim_{n\to\infty}x_n=2.$$

(4) $f(x)=ax(1-x)$ のとき, $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ で, $0\leqq x_1\leqq 1$ を満たすすべての x_1 について $0\leqq x_n\leqq 1$ が成り立つためには, $0\leqq x_2\leqq 1$ が必要.

この条件は,

$$0\leqq x_2=ax_1(1-x_1)\leqq 1$$

すなわち, $0\leqq x\leqq 1$ における $y=ax(1-x)$ の値域を考えればよい. $x=0$, 1 のとき最小値 0, $x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{a}{4}$ をとるので,

$$0\leqq\frac{a}{4}\leqq 1\iff 0\leqq a\leqq 4\quad\cdots①$$

逆にこのとき, 帰納的に

$$0\leqq x_n\leqq 1\implies 0\leqq x_{n+1}\leqq 1$$

が示せるから十分でもある. よって, $0\leqq a\leqq 4$ が必要十分条件.

この条件の下で, $x_1\neq 0$ となる x_1 に対して,

$$x_1=x_2$$

となるとき

$$x_1=ax_1(1-x_1)\iff x_1\{1-a(1-x_1)\}=0$$

$x_1\neq 0$ であるから, $x_1=1-\frac{1}{a}$.

このような x_1 が存在するのは

$$0<x_1\leqq 1\iff 0<1-\frac{1}{a}\leqq 1\iff 1<a$$

① と合わせて, $1<a\leqq 4$.

同様に $x_1<x_2$, $x_3=x_1$ となる x_1 が存在する条件は,

$$x_3=ax_2(1-x_2)=a\{ax_1(1-x_1)\}\{1-ax_1(1-x_1)\}$$

であるから, $x_1=x_3$ の条件を考えて,

$$a\{ax_1(1-x_1)\}\{1-ax_1(1-x_1)\}=x_1$$

$$\iff a^2(1-x_1)(ax_1{}^2-ax_1+1)=1$$

$$\iff a^3x_1{}^3-2ax_1{}^2-a^2(a+1)x_1+a^2-1=0\quad\cdots②$$

$x_1=x_3$ は $x_1=x_2=x_3$ のものも含まれるので, $x_1=1-\frac{1}{a}$ を解に持つことは明らかで,

② は,

$$\{ax_1-(a-1)\}\{a^2x_1{}^2+(-a^2-a)x_1+(a+1)\}=0$$

と因数分解できる. よって, $x_1<x_2$, $x_1=x_3$ なる解が存在するのは,

$a^2x_1{}^2+(-a^2-a)x_1+(a+1)=0$ …③ が実数解をもつことが必要である. この方程式の判別式を D とすると, $D\geqq 0$ から

$$D=\{-a(a+1)\}^2-4a^2(a+1)\geqq 0$$

$$\iff a^2(a+1)(a-3)\geqq 0$$

つまり, $a\leqq -1$, $a=0$, $3\leqq a$ …④ が必要.

このとき, 解の公式により,

$$x_1=\frac{a^2+a\pm\sqrt{a^2(a+1)(a-3)}}{2a^2}=\frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}\quad\cdots⑤$$

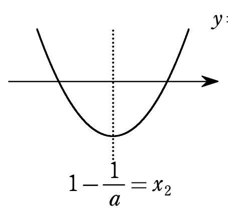
となる. また, $x_1<x_2$ から ③ は$x_1=1-\frac{1}{a}$ を解に持たない.

$$a^2\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+(-a^2-a)\left(1-\frac{1}{a}\right)+a+1\neq 0\iff a\neq 3\quad\cdots⑥$$

①, ④, ⑥ より $3<a\leqq 4$.

また, ③ の左辺を $g(x_1)$ とおけば,

$3<a$ で $g\left(1-\frac{1}{a}\right)<0$ となるから,



グラフより, $x_1<x_2$ を満たすのは, ⑤ のうち小さい方である. したがって,

$$x_1=\frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

【別解】

(4) 空欄「モ」以降

$x_2=f(x_1)=a(x_1-x_1{}^2)$, $x_3=f(x_2)=a(x_2-x_2{}^2)$ より, $x_3=x_1$ のとき,

$$\begin{cases}x_2=a(x_1-x_1{}^2)\\ x_1=a(x_2-x_2{}^2)\end{cases}\quad(x_1<x_2)$$

$x_1=s$, $x_2=t$ とおくと,

$$\begin{cases}t=a(s-s^2)\quad\cdots⑦\\ s=a(t-t^2)\end{cases}\quad(s<t)$$

両辺の差をとると,

$$t-s=a\{-(t-s)+(t^2-s^2)\}$$

$t-s\ (\neq 0)$ で割ると,

$$1=a(-1+s+t)$$

$a=0$ と仮定すると, $x_1=x_2=0$ となり矛盾するから $a\neq 0$ であり,

$$s+t=1+\frac{1}{a}\quad\cdots⑧$$

さらに ⑦ より, $t=as(1-s)$ であり, ⑧ $\iff 1-s=t-\frac{1}{a}$ を代入すると,

$$t=as\left(t-\frac{1}{a}\right)\iff t=ast-s$$

したがって,

$$st=\frac{s+t}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\quad\cdots⑨$$

⑧, ⑨ より, s, t は次の2次方程式の2解である.

$$X^2-\left(1+\frac{1}{a}\right)X+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)=0$$

$\iff (aX)^2-(a+1)(aX)+(a+1)=0$ …⑩

$s<t$ より, この2次方程式が異なる2つの実数解をもてばよいから,

$(a+1)^2-4(a+1)=(a+1)(a-3)>0$ …⑪

ただし, $0<a\leqq 4$ より ⑪ $\iff a>3$ であるから, 求める a の条件は,

$$3<a\leqq 4$$

また, ⑩ を解くと,

$$aX=\frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2}\iff X=\frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

となり, $s<t$ であるから,

$$x_1=s=\frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

Ⅲ

(1)　1050 と 819 の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めよ.

(2)　2 つの正の整数 a, b $(a<b)$ があり, b を a で割った余りを r とする. $r\neq 0$ のとき, a, b の公約数 c は r の約数であることを示せ.

(3)　2 つの正の整数 a, b $(a<b)$ があり, それらの最大公約数を m とする. このとき, ある整数 s, t を用いて $m=sa+tb$ と表されることを示せ.

解答　(1)　21　(2)　略　(3)　略

(1)　$1050=819\cdot 1+231$

$819=231\cdot 3+126$

$231=126\cdot 1+105$

$126=105\cdot 1+21$

$105=21\cdot 5$

以上の計算により, 1050 と 819 の最大公約数は 21 である.

(2)　b を a で割ったときの商を q とすると,

$$b=aq+r \quad \cdots ①$$

さらに, a, b をその公約数 c で割ったときの商を a', b' とすると,

$$① \iff cb'=ca'q+r \iff c(b'-a'q)=r$$

$b'-ca'$ は整数であるから, c は r の約数である.

(3)　以下, 2 つの正の整数 u, v の最大公約数を $(u,\ v)$ と表す.

$x_0=b$, $x_1=a$ とおく.

さらに自然数 n に対し, x_{n-1} を x_n で割ったときの商を y_n, 余りを x_{n+1} と定める.

$$x_0=x_1y_1+x_2 \quad \cdots ②$$

$$x_1=x_2y_2+x_3$$

$$x_2=x_3y_3+x_4$$

$$\vdots$$

ただし, 余りは割る数よりも小さいから $x_1>x_2>x_3>\cdots$ となり, いずれは 0 になるので, そこで終了とする.

したがって, ある自然数 N に対して,

$$x_{N-3}=x_{N-2}y_{N-2}+x_{N-1} \quad \cdots ③$$

$$x_{N-2}=x_{N-1}y_{N-1}+x_N \quad \cdots ④$$

$$x_{N-1}=x_Ny_N \quad \cdots ⑤$$

また (2) より, ② において x_2 は x_0, x_1 の任意の公約数で割り切れる.

同様に, x_0 は x_1, x_2 の任意の公約数で割り切れる.

したがって, 「x_0, x_1 の公約数の集合」と「x_1, x_2 の公約数の集合」は一致し, その中の最大の要素である最大公約数も一致するから,

$$m=(x_0,\ x_1)=(x_1,\ x_2)$$

以降も帰納的に考えると,

$$m=(x_0,\ x_1)=(x_1,\ x_2)=(x_2,\ x_3)=\cdots\cdots=(x_{N-1},\ x_N)$$

となる.

⑤ において, x_{N-1}, x_N を m で割ったときの商を k, l (k, l は互いに素) とすると,

$$⑤ \iff mk=mly_N \iff \frac{k}{l}=y_N$$

k, l は互いに素であるから, $l=1$ であることが分かり $x_N=m$ となる.

したがって, ④ より,

$$m=x_N=x_{N-2}-x_{N-1}y_{N-1}$$

さらに, $③ \iff x_{N-1}=x_{N-3}-x_{N-2}y_{N-2}$ を代入して,

$$m=x_{N-2}-(x_{N-3}-x_{N-2}y_{N-2})y_{N-1}$$

$$=x_{N-3}\cdot(-y_{N-1})+x_{N-2}(1+y_{N-2}y_{N-1})$$

この操作を ② までさかのぼって行うと,

$$m=x_0P(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-1})+x_1Q(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-1})$$

$$=bP(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-1})+aQ(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-1})$$

ただし, $P(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-1})$, $Q(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-1})$ は y_1, y_2, $\cdots$, y_{N-1} についての整数係数の多項式であり, これらは整数であるから,

$$t=P(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-1}), \qquad s=Q(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-1})$$

とおくと, $m=sa+tb$ と表すことができる.

【講評】

Ⅰ (小問集合　複素数平面, 場合の数, 媒介変数表示された曲線)

(1)　正 7 角形絡みの問題で授業でも扱っていた典型問題.

(3)　図がかいてあるので, 扱いやすかっただろう.

しっかり得点したいところだ.

Ⅱ (漸化式と極限)

(1) から順に解いていく問題だが, (2) よりも (3) の方が扱いやすい. うまく立ち回って部分点を稼いでほしい. YMS としては (4) が他の大学別対策でやった問題でありここを取りたかった.

Ⅲ (整数, ユークリッドの互除法)

証明問題も典型問題. 流れを知っていれば完答できるだろう. この問題の出来は合否を分けただろう.

レベル高いが典型問題も多く, 実力が反映されやすいセットだった. 数学を得意としているならば 70% を超えてくるだろう. 合格ラインとして, 55% は確保したい.