YMS 2019年度 解答速報 東京慈恵会医科大学 数学

1． 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

(1) xy 平面上を動く点 P が，最初に座標 $(2,\ 0)$ の位置にある．白玉 2 個，赤玉 1 個，青玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてからもとに戻す．取り出した玉の色によって，次のように P を移動し硬貨をもらう試行を考える．

P が座標 $(m,\ n)$ の位置にあるとき，

- 取り出した玉の色が白色ならば，P は座標 $(m+1,\ n)$ の位置へ移動
- 取り出した玉の色が赤色ならば，P は座標 $(m,\ n+1)$ の位置へ移動
- 取り出した玉の色が青色ならば，P は座標 $(m-1,\ n)$ の位置へ移動

移動後に，P の x 座標と y 座標の和が 0 または 3 のとき，硬貨を 1 枚もらう．

この試行を 4 回続けて行う．

このとき，3 回目の試行で初めて硬貨をもらう確率は $\boxed{(ア)}$ であり，4 回目の試行で硬貨をもらい，かつ，もらう硬貨の総数が 2 枚となる確率は $\boxed{(イ)}$ である．

(2) △ABC において，AB$=4$，BC$=5$，CA$=6$ とする．△ABC の重心 G から辺 BC に下ろした垂線を GH とするとき，$\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}$ の値は $\boxed{(ウ)}$ である．

解答 (1) (ア)$\dfrac{9}{64}$ (イ)$\dfrac{9}{256}$ (2) $\dfrac{11}{30}$

【解説】

(1) P の座標 $(m,\ n)$ に対して $X=m+n$ とおく．$X=0,\ 3$ となるときに硬貨を 1 枚もらう．1 回の試行において，以下のように事象を設定する．

事象 E：取り出した玉が白色または赤色で，X が 1 増える

事象 F：取り出した玉が青色で，X が 1 減る

最初に $X=2$ にあったので，3 回目の試行で初めて効果をもらう場合は，

$$X=2 \ \to\ X=1 \ \to\ X=2 \ \to\ X=3$$

と変化するときである．すなわち事象 $F,\ E,\ E$ の順に起こる場合なので，

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}.$$

また，4 回目の試行で硬貨をもらい，かつ，もらう硬貨の総数が 2 枚となる場合を考える．4 回目に $X=3$ となることはないので，4 回目には $X=0$ となり硬貨をもらう．

(i) 1 回目と 4 回目に硬貨をもらう場合

$$X=2 \ \to\ X=3 \ \to\ X=2 \ \to\ X=1 \ \to\ X=0$$

と変化するときである．すなわち，事象 $E,\ F,\ F,\ F$ の順に起こる場合なので，

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{256}$$

(ii) 2 回目と 4 回目に効果をもらう場合

$$X=2 \ \to\ X=1 \ \to\ X=0 \ \to\ X=1 \ \to\ X=0$$

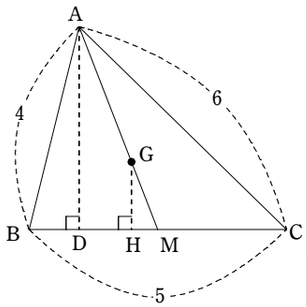
$$X=2 \ \to\ X=1 \ \to\ X=0 \ \to\ X=-1 \ \to\ X=0$$

と変化するときである．すなわち，事象 $F,\ F,\ E,\ F$ または $F,\ F,\ F,\ E$ の順に起こる場合なので，

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{128}$$

(i)(ii) より $\dfrac{3}{256}+\dfrac{3}{128}=\dfrac{9}{256}$.

(2) 右の図のように点をとる．余弦定理より，



$$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{1}{8}$$

△ABD に注目すると，

$$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{B}=\frac{1}{2}$$

また重心 G の性質から，点 M は BC の中点であり，

$$\mathrm{BM}=\frac{5}{2}$$

$$\mathrm{DM}=\mathrm{BM}-\mathrm{BD}=2$$

$$\mathrm{HM}=\frac{1}{3}\mathrm{DM}=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{BH}=\mathrm{BD}+\mathrm{DH}=\frac{11}{6}$$

したがって，

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\frac{\frac{11}{6}}{5}=\frac{11}{30}.$$

【別解】

余弦定理より $\cos\angle\mathrm{B}=\dfrac{1}{8}$ である．ここで xy 平面上で B$(0,\ 0)$，C$(5,\ 0)$ とすると，

$$(\mathrm{A}\text{ の }x\text{ 座標})=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{B}=\frac{1}{2}$$

$$(\mathrm{G}\text{ の }x\text{ 座標})=\frac{\frac{1}{2}+0+5}{3}=\frac{11}{6}=\mathrm{BH}$$

よって

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\frac{\frac{11}{6}}{5}=\frac{11}{30}$$

【別解】

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2 \iff 6^2=5^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+4^2 \iff \vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{5}{2}$$

また，点 G は△ABC の重心なので，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{c}=\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)=\frac{55}{6}$$

$$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BH}=\frac{55}{6}$$

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}^2}=\frac{55}{6}\cdot\frac{1}{5^2}=\frac{11}{30}$$

2． $a,\ b$ は定数で $a>1$ とする．2 つの曲線 C_1：$y=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$，C_2：$y=\dfrac{e^x}{a^2}+b$ が共有点 P をもち，点 P において共通の接線をもつとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C_1 の凹凸および変曲点を調べ，C_1 の概形を描け．

(2) 点 P の座標と b を a で表せ．

(3) C_1，C_2 と y 軸で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a で表せ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}S(a)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてよい．

解答 (1) 省略 (2) $\mathrm{P}\left(\log(2a-1),\ 3-\dfrac{2}{a}\right)$，$b=3-\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{a^2}$

(3) $S(a)=\dfrac{2a-2}{a^2}+\dfrac{1-4a}{a^2}\log(2a-1)+4\log\left(1-\dfrac{1}{2a}\right)+4\log 2$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}S(a)=4\log 2$

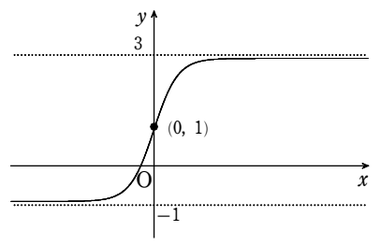
【解説】

(1) $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=3-\dfrac{4}{e^x+1}$ とする．

$f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}>0$，$f''(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^3}(1-e^x)$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	/	+	+	+	/
$f''(x)$	/	+	0	−	/
$f(x)$	(-1)	⤴	1	⤷	(3)

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=3$ で，変曲点は $(0,\ 1)$ である．これより，C_1 の概形は次のようになる．

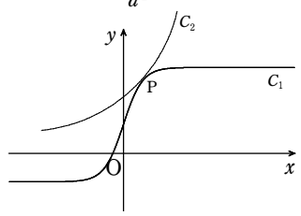


(2) 点 P の x 座標を t とする．

点 P において，C_1 と C_2 は共通接線をもつことから，$g(x)=\dfrac{e^x}{a^2}+b$ とすると

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{3e^t-1}{e^t+1}=\dfrac{e^t}{a^2}+b & \cdots\cdots① \\ \dfrac{4e^t}{(e^t+1)^2}=\dfrac{e^t}{a^2} & \cdots\cdots② \end{cases}$$



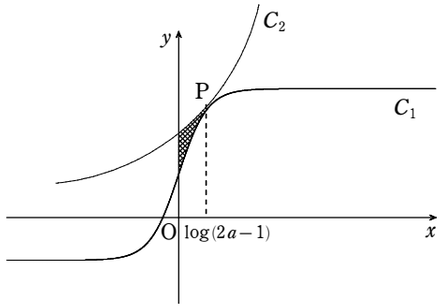
が成り立つ．

②から $a^2=\dfrac{(e^t+1)^2}{4}$ $\therefore$ $a=\dfrac{e^t+1}{2}$ ($\because$ $a>1$) $\therefore$ $e^t=2a-1$ ……③

これを①に代入して $b=\dfrac{(6a-2)(2a-2)}{(2a)^2}=3-\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{a^2}$

また，③から $t=\log(2a-1)$ なので，点 P の座標は $\mathrm{P}\left(\log(2a-1),\ 3-\dfrac{2}{a}\right)$

(3)



C_1，C_2 と y 軸で囲まれた部分は上図の斜線部分になるから，

$$S(a)=\int_0^{\log(2a-1)}\left(\frac{e^x}{a^2}+3-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2}-3+\frac{4}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^{\log(2a-1)}\left(\frac{e^x}{a^2}-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{4}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{e^x}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{4}{a}\right)x\right]_0^{\log(2a-1)}+4\int_0^{\log(2a-1)}\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\frac{2a-2}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{4}{a}\right)\log(2a-1)+4\left\{\log(2a-1)-\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^{\log(2a-1)}\right\}$$

$$=\frac{2a-2}{a^2}+\frac{1-4a}{a^2}\log(2a-1)+4\log\frac{2a-1}{2a}+4\log 2$$

$$=\frac{2a-2}{a^2}+\frac{1-4a}{a^2}\log(2a-1)+4\log\left(1-\frac{1}{2a}\right)+4\log 2$$

$$=\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}+\frac{\log(2a-1)}{2a-1}\cdot\left(\frac{1}{a}-4\right)\left(2-\frac{1}{a}\right)+4\log\left(1-\frac{1}{2a}\right)+4\log 2$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{\log(2a-1)}{2a-1}=\lim_{X\to\infty}\frac{\log X}{X}=0$ であることに注意して，($2a-1=X$ と置換した)

$$\lim_{a\to\infty}S(a)=4\log 2$$

3． m，n は自然数の定数とする．自然数 x，y が不等式

$$y\leqq -x^2+20nx,\quad y\geqq\frac{12n}{m}x$$

をみたすとき，m の値に応じて，$y-x$ の最大値と，そのときの x，y の値を n で表せ．

解答　$m=1$ のとき 最大値 $96n^2-8n$　$(x,\ y)=(8n,\ 96n^2)$

$m\geqq 2$ のとき 最大値 $100n^2-10n$　$(x,\ y)=(10n-1,\ 100n^2-1)$，$(10n,\ 100n^2)$

【解説】

x，y を実数とみて，連続関数として考える．

放物線 C：$y=-x^2+20nx$　…①　直線 l：$y=\dfrac{12n}{m}x$　…②

領域 D：$\begin{cases} y\leqq -x^2+20nx \\ y\geqq\dfrac{12n}{m}x \end{cases}$　…③

$y-x=k$ とおくと，$y=x+k$ は傾き 1 の直線を表す．これが C と接するとき，① より

$$y'=-2x+20n$$

$y'=1$ より　$-2x+20n=1 \iff x=10n-\dfrac{1}{2}$

したがって，x は自然数なので，点 $(x,\ y)$ が C 上にあるとき，

$(x,\ y)=(10n-1,\ 100n^2-1)$ または $(10n,\ 100n^2)$

のどちらかで k は最大になる．

また，C と l との交点は ①，② から

$$-x^2+20nx=\frac{12n}{m}x \iff x=0,\ 20n-\frac{12n}{m}$$

である．

(i)　$m=1$ のとき

n は自然数であるから

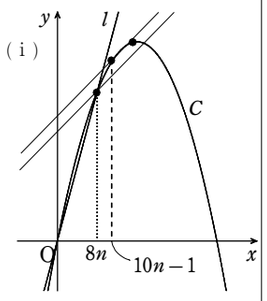
$$10n-1>20n-\frac{12n}{1}=8n$$

したがって，k が最大となるのは，

$(x,\ y)=(8n,\ 96n^2)$

のときであり，

$$y-x=96n^2-8n.$$



(ii)　$m\geqq 2$ のとき，

$$20n-\frac{12n}{m}\geqq 20n-\frac{12n}{2}>10n$$

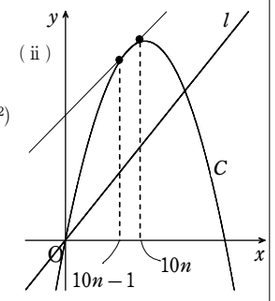
したがって，k が最大となるのは，

$(x,\ y)=(10n-1,\ 100n^2-1)$ または $(10n,\ 100n^2)$

のときであり，ともに

$$y-x=100n^2-10n$$

である．



したがって，

$m=1$ のとき 最大値 $96n^2-8n$

$(x,\ y)=(8n,\ 96n^2)$

$m\geqq 2$ のとき 最大値 $100n^2-10n$

$(x,\ y)=(10n-1,\ 100n^2-1)$ または $(10n,\ 100n^2)$

4． 方程式 $x^3+1=0$ の解のうち，虚部が正であるものを α とする．複素数平面上の3点 $A(\alpha)$，$B(-1)$，$C(\overline{\alpha})$ を頂点とする△ABCを考える．△ABCの周上の点 $P(z)$ に対して，原点Oを端点とし $P(z)$ を通る半直線上に $|w|=\dfrac{1}{|z|}$ をみたす点 $Q(w)$ をとるとき，次の問いに答えよ．ただし，複素数 γ に共役な複素数を $\overline{\gamma}$ で表し，複素数平面上で複素数 γ を表す点Gを $G(\gamma)$ と書く．

(1) $w=\dfrac{1}{z}$ となることを示せ．

(2) $P(z)$ が△ABCの周上を動くとき，$Q(w)$ が描く図形によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答 (1) 略　(2) $2\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【解説】

(1) 点Qは半直線OP上に存在するので，ある実数 t を用いて

$$w=tz\ (t>0)$$

とおく．このとき，

$$|w|=|tz| \iff |w|=t|z|$$

であり，$|w|=\dfrac{1}{|z|}$ に代入すると，

$$t|z|=\frac{1}{|z|} \iff t=\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{z\overline{z}}$$

したがって，

$$w=tz=\frac{1}{z\overline{z}}\cdot z=\frac{1}{\overline{z}}$$

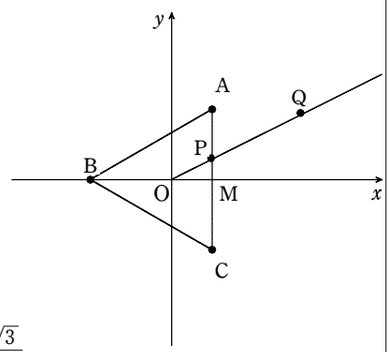
（証明終わり）

(2) $$x^3+1=0 \iff (x+1)(x^2-x+1)=0$$

x は虚部が正なので，$x+1\neq 0$ であり，

$$x^2-x+1=0 \iff x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

から，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ である．



$z=x+yi$，$w=X+Yi$，線分ACの中点をMとし，点Pが線分AM上にあるときを考える．このとき，

$$x=\frac{1}{2},\ 0\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots①$$

である．(1) より，

$$w=\frac{1}{\overline{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}i$$

であるから，① より

$$w=\frac{2}{4y^2+1}+\frac{4y}{4y^2+1}i,\ 0\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

したがって，

$$X=\frac{2}{4y^2+1},\ Y=\frac{4y}{4y^2+1} \quad \cdots②$$

$0\leqq y\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $0\leqq y^2\leqq\dfrac{3}{4} \iff \dfrac{1}{2}\leqq X\leqq 2 \quad \cdots③$

② より $Y=2yX$ であり，$X\neq 0$ から $y=\dfrac{Y}{2X}$．よって

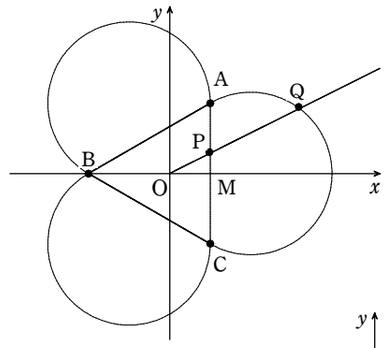
$$X=\frac{2}{4\left(\frac{Y}{2X}\right)^2+1}=\frac{2}{\frac{Y^2}{X^2}+1} \iff X^2+Y^2-2X=0$$

$$\iff (X-1)^2+Y^2=1$$

したがって，点Pが線分AM上を動くとき，

円弧：$(X-1)^2+Y^2=1$，$\dfrac{1}{2}\leqq X\leqq 2$，$Y\geqq 0$

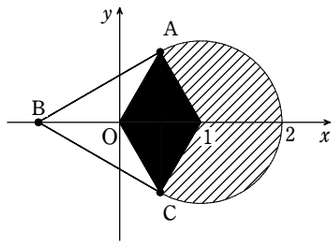
を描く．図形の対称性から，次の図のようになる．



したがって，囲まれた図形の面積 S は，

$$\frac{S}{3}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$$

$$S=2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



【別解】

$|z|=r_1$，$|w|=r_2$，$\arg z=\theta$ とおく．

点Pが線分AM上を動くとき

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ であり，

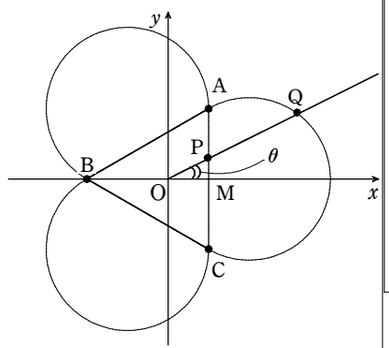
$$\mathrm{OP}\cos\theta=\mathrm{OM}$$

$$\iff r_1\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\iff r_1=\frac{1}{2\cos\theta}$$

(1) より

$$r_2=\frac{1}{r_1}=2\cos\theta$$



点PがAM上を動くときに点Qが描く図形の極方程式は $r=2\cos\theta$ である．

対称性から求める図形の面積は，

$$\frac{S}{6}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}r^2d\theta$$

$$S=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos\theta)^2d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}2(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=3\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

【講評】

1． 小問集合

(1) 確率

一見ややこしそうな設定だが，事象をまとめると計算はシンプル．ここは落とせない．

(2) 平面図形

教科書の練習問題レベル．様々な解法が選択できる．ここも落としてはいけないだろう．

2． 微分法，極限

計算結果は煩雑だが，計算量もそれほど多くなく，ミスに気を付けて丁寧に解き進めて欲しい．最後の極限計算は，上手く変形して与えられた形を作りたい．

3． 整数（格子点と最大値）

x，y が実数であるときと同様に考え，領域を図示し，直線との共有点を考えるのだが，直線の傾きを考えると場合分けが必要になる．また x，y が自然数である点にも，気を付けなければならない．数学力が試される問題だろう．

4． 複素数平面（反転）

複素数平面の典型問題．一度は解いたことがあるテーマだろう．ここの出来で差がつきやすいだろう．

全体として，易化しており，例年よりも数学で差がつきやすいセットだった．7割とって欲しいが1次通過ライン60％強だろう．