[1] 以下の問いに答えなさい.

(1) つぎの式の値を求めなさい.

$$\left\{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(5+2\sqrt{6})+\frac{5+3\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right\}^2=\boxed{1}+\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$$

(2) $(x-2)(x-1)(x+3)(x+4)=36$ を解くと,

$$x=-\boxed{4},\quad -\boxed{5}\pm\sqrt{\boxed{6}\,\boxed{7}}$$

(3) 白玉8個と赤玉4個が入っている袋から,玉を3個同時に取り出すとき,取り出した玉が,白玉が2個かつ赤玉が1個である確率は $\dfrac{\boxed{8}\,\boxed{9}}{\boxed{10}\,\boxed{11}}$ である.

(4) x に関する不等式 $\log_{\frac{1}{10}}(x+4)\leqq\log_{10}(10-x)$ を解くと

$$\boxed{12}-\boxed{13}\sqrt{\boxed{14}}\leqq x\leqq\boxed{15}+\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}$$

である.

解答 (1) $4+2\sqrt{3}$ (2) -1, $-1\pm\sqrt{13}$ (3) $\dfrac{28}{55}$ (4) $3-4\sqrt{3}\leqq x\leqq 3+4\sqrt{3}$

【解説】

(1)

$$\left\{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(5+2\sqrt{6})+\frac{5+3\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right\}^2$$

$$=\left\{2(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})+\frac{(5+3\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}\right\}^2$$

$$=\left\{2(25-24)+\frac{\sqrt{3}-1}{49-48}\right\}^2$$

$$=(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$$

(2)

$$(x-2)(x-1)(x+3)(x+4)=36$$

$$\iff (x^2+2x-8)(x^2+2x-3)=36$$

ここで,$x^2+2x-8=A$ とおくと,

$$A(A+5)=36$$

$$\iff A^2+5A-36=0$$

$$\iff (A+9)(A-4)=0$$

$$\iff A=-9,\ 4$$

よって,$x^2+2x+1=0$ または $x^2+2x-12=0$

これを解くと $x=-1$ (重解),$x=-1\pm\sqrt{13}$

(3) 白玉8個,赤玉4個の合計12個の玉の中から3個の玉を取り出すので,すべての玉を区別して考えるとき,その取り出し方は全部で

${}_{12}C_3$ 通り.

また,白玉を2個,赤玉を1個取り出すのは,すべての玉を区別して考えると

${}_8C_2\times{}_4C_1$ 通り

よって求める確率は,

$$\frac{{}_8C_2\times{}_4C_1}{{}_{12}C_3}=\frac{28}{55}$$

(4) $\log_{\frac{1}{10}}(x+4)\leqq\log_{10}(10-x)$ …①

真数条件より,$x+4>0$ かつ $10-x>0$ なので,$-4<x<10$ …②

このとき,① を変形し,

$$① \iff -\log_{10}(x+4)\leqq\log_{10}(10-x)$$

$$\iff \log_{10}(10-x)(x+4)\geqq 0$$

$$\iff (10-x)(x+4)\geqq 1$$

$$\iff x^2-6x-39\leqq 0$$

$$\iff 3-4\sqrt{3}\leqq x\leqq 3+4\sqrt{3}$$

これは ② を満たす.

[2] 以下の問いに答えなさい.

(1) 直線 $y=2x+k$ と曲線 $4x^2+y^2=16$ がちょうど2個の共有点をもつための k の値の範囲は $-\boxed{18}\sqrt{\boxed{19}}<k<\boxed{20}\sqrt{\boxed{21}}$ である.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=\dfrac{1}{24}(2n^3-75n^2+97n)$ $(n\geqq 1)$ で与えられるとする.a_n は $n=\boxed{22}\,\boxed{23}$ のとき最小値 $-\boxed{24}\,\boxed{25}$ をとる.

(3) a, b を定数とする.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=2$$

であるならば,$a=-\dfrac{\boxed{26}\,\boxed{27}}{\boxed{28}\,\boxed{29}}$,$b=\dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$ である.

(4) 2つの曲線 $y=-x^2+3$ および $y=x^2-5x$ により囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{32}\,\boxed{33}\,\boxed{34}}{\boxed{35}\,\boxed{36}}$ である.また,これら2つの曲線の交点をともに通る直線の方程式は $\boxed{37}x+\boxed{38}y=3$ である.

解答 (1) $-4\sqrt{2}<k<4\sqrt{2}$ (2) $n=13$,最小値 -35

(3) $a=-\dfrac{31}{16}$,$b=\dfrac{1}{4}$ (4) 面積 $\dfrac{343}{24}$,$5x+2y=3$

【解説】

(1) 直線 $y=2x+k$ と楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ が2つの共有点をもつとき,この2つの図形を y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍して考えると,

直線 l':$2x-2y+k=0$,円 C':$x^2+y^2=4$

が共有点を2つ持つことと同値である.したがって円 C' の中心 O と直線 l' との距離を d とおくとき,$d<2$ (=半径) が成り立てばよいので,

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}<2 \iff |k|<4\sqrt{2} \iff -4\sqrt{2}<k<4\sqrt{2}$$

(2) $S_n=\dfrac{1}{24}(2n^3-75n^2+97n)$ $(n\geqq 1)$

$n=1$ のとき,$a_1=S_1=1$ である.

$n\geqq 2$ のとき,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{24}[(2n^3-75n^2+97n)-\{2(n-1)^3-75(n-1)^2+97(n-1)\}]$$

$$=\frac{1}{24}(6n^2-156n+174)=\frac{1}{4}(n^2-26n+29)$$

この式は,$n=1$ のとき $a_1=1$ を満たす.ここで,

$$a_n=\frac{1}{4}(n-13)^2-35$$

と変形できるので,$n=13$ のときに最小値 -35 をとる.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=2$

このとき,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}\cdot(x-2)=2\cdot\lim_{x\to 2}(x-2)=0$$

$$\iff \lim_{x\to 2}(\sqrt{x+a}-b)=0$$

$$\iff \sqrt{2+a}=b$$

したがって,

$$(\text{左辺})=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+a-(2+a)}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a}}=\frac{1}{2\sqrt{2+a}}=2$$

これを解くと,

$$\frac{1}{2\sqrt{2+a}}=2 \iff \sqrt{2+a}=\frac{1}{4} \iff a=-\frac{31}{16}$$

このとき,$b=\dfrac{1}{4}$ である.

(4) $y=-x^2+3$ と $y=x^2-5x$ の交点の x 座標を求めると,

$$-x^2+3=x^2-5x \iff 2x^2-5x-3=0 \iff x=-\frac{1}{2},\ 3$$

したがって,2つの曲線により囲まれる図形の面積は,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{3}\{(-x^2+3)-(x^2-5x)\}dx=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)dx$$

$$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(3+\frac{1}{2}\right)^3=\frac{343}{24}$$

また,2曲線の2交点を通る図形の方程式を実数 k を用いて,

$$(y+x^2-3)+k(y-x^2+5x)=0$$

と表すことができる.ここで,$k=1$ を代入すると x^2 の項が消えて x,y の1次方程式となるが,これが求める直線の方程式に他ならない.

$$(y+x^2-3)+(y-x^2+5x)=0 \iff 5x+2y=3$$

[3]

AB=3, BC=6, CA=5 である三角形 ABC において，頂点 A から辺 BC に垂線 AD を引く．三角形 ABD の内接円の中心を O_1 とし半径を r_1 で表す．また，三角形 ADC のの内接円の中心を O_2 とし半径を r_2 で表す．

(1)　$AD=\dfrac{\boxed{39}}{3}\sqrt{\boxed{40}\boxed{41}}$，$r_1=\dfrac{\sqrt{\boxed{42}\boxed{43}}-\boxed{44}}{\boxed{45}}$，$r_2=r_1+\dfrac{\boxed{46}}{\boxed{47}}$ である．

(2)　内接円 O_1 と辺 AB との接点を E，内接円 O_2 と辺 CA との接点を F とするとき，

$AE=\dfrac{\sqrt{\boxed{48}\boxed{49}}+\boxed{50}}{\boxed{51}}$，$AF=AE-\dfrac{\boxed{52}}{\boxed{53}}$ である．

(3)　AO_1 と AO_2 のなす角を θ で表すとき，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{\boxed{54}\boxed{55}\boxed{56}}}{15}$ である．

また，三角形 AO_1O_2 の面積は $\dfrac{\boxed{57}}{\boxed{58}}$ である．

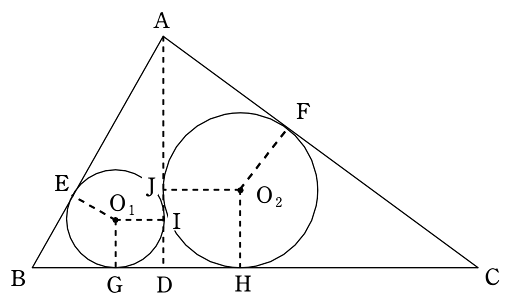
解答　(1) $AD=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$，$r_1=\dfrac{\sqrt{14}-2}{3}$，$r_2=r_1+\dfrac{1}{3}$

(2) $AE=\dfrac{\sqrt{14}+2}{3}$，$AF=AE-\dfrac{1}{3}$

(3) $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{105}}{15}$，面積 $\dfrac{4}{3}$

【解説】

下の図のように接点をG，H，I，J とする．



(1)　△ABC で余弦定理を用いると，

$$\cos\angle ABC=\frac{3^2+6^2-5^2}{2\cdot3\cdot6}=\frac{5}{9}$$

したがって，$\sin\angle ABC=\dfrac{2\sqrt{14}}{9}$ であり，△ABD において，

$$BD=AB\times\cos ABC=\frac{5}{3}$$

$$AD=AB\times\sin\angle ABC=\frac{2\sqrt{14}}{3}$$

また，$AE=AI=a$，$BE=BG=b$ とおくと，

$AB=a+b$，$BD=b+r_1$，$AD=a+r_1$

であり，これを利用して

$$AB+BD+AD=2a+2b+2r_1=3+\frac{5}{3}+\frac{2\sqrt{14}}{3},\quad a+b=3$$

よって，$r_1=\dfrac{\sqrt{14}-2}{3}$．

同様に，$AF=AJ=c$，$CH=CF=d$ とおくと，

$$AD+CD+AC=2c+2d+2r_2=\frac{2\sqrt{14}}{3}+\frac{13}{3}+5,\quad c+d=5$$

よって，$r_2=\dfrac{\sqrt{14}-1}{3}=r_1+\dfrac{1}{3}$．

(2)　(1) より

$$AE=AD-r_1=\frac{\sqrt{14}+2}{3}$$

$$AF=AD-r_2=AE-\frac{1}{3}.$$

(3)　線分 AO_1 は∠BAD の 2 等分線であり，また線分 AO_2 は∠CAD の 2 等分線である．

したがって，

$$\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=2\times\angle O_1AD+2\angle O_2AD=2\theta$$

余弦定理より

$$\cos\angle BAC=\frac{3^2+5^2-6^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{15}$$

よって，$\cos2\theta=-\dfrac{1}{15}$．

これを用いて，$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}=\dfrac{7}{15}$

θ は明らかに鋭角であり，$\cos\theta>0$．よって，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{105}}{15}$．

また，$AI=AE=\dfrac{\sqrt{14}+2}{3}$，$AJ=AF=\dfrac{\sqrt{14}+1}{3}$ より

$$AO_1=\sqrt{AI^2+r_1{}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}+2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}-2}{3}\right)^2}=2$$

$$AO_2=\sqrt{AJ^2+r_2{}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}+1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}-1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{3}$$

よって，$\triangle AO_1O_2=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{30}}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}=\dfrac{4}{3}$．

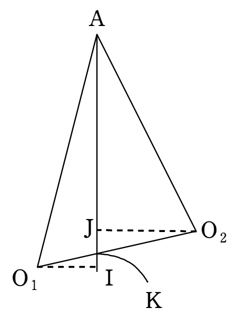
【(3) の別解】

線分 O_1O_2 と線分 AD の交点を K とおく．

$\triangle O_1IK\backsim\triangle O_2JK$ であるから

$IK:JK=r_1:r_2$

したがって，



$$AK=AJ+JK=AJ+IJ\times\frac{r_2}{r_1+r_2}$$

$$=AF+(AI-AJ)\times\frac{r_2}{r_1+r_2}$$

$$=AF+(AE-AF)\times\frac{r_2}{r_1+r_2}$$

$$\triangle AO_1O_2=\triangle AKO_1+\triangle AKO_2=\frac{1}{2}\times AK\times IO_1+\frac{1}{2}\times AK\times JO_2$$

$$=\frac{1}{2}\times AK\times(IO_1+JO_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{AF+(AF-AE)\times\frac{r_2}{r_1+r_2}\right\}\times(r_1+r_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{14}+1}{3}(r_1+r_2)+\frac{1}{3}\times r_2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{14}+1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{14}-3}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{14}-1}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}.$$

［4］

直線 $l: y=-x+3$ および曲線 $C: y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ (ただし，$x>1$) について，以下の問いに答えなさい．

(1) 点 $(3,\ 0)$ を通り曲線 C と接する接線の方程式を $y=ax+b$ とおくとき，a と b の値を求めなさい．

(2) l と C の交点の座標をすべて求めなさい．

(3) l と C で囲まれる図形の面積を求めなさい．

解答 (1) $a=-\frac{3\sqrt{6}}{8}$，$b=\frac{9\sqrt{6}}{8}$　(2) $(2,\ 1)$，$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$　(3) $\frac{5\sqrt{5}-11}{4}$

【解説】

$$l: y=-x+3,\ C: y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

(1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ とおく．$(x>1)$

$$f'(x)=-\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-\frac{1}{\sqrt{t-1}}=-\frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}}(x-t)$$

この接線が点 $(3,\ 0)$ を通るとき，

$$-\frac{1}{\sqrt{t-1}}=-\frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}}(3-t)$$

$$\iff 2(t-1)=3-t \iff t=\frac{5}{3}$$

よって，$a=-\frac{1}{2\left(\frac{5}{3}-1\right)\sqrt{\frac{5}{3}-1}}=-\frac{3\sqrt{6}}{8}$．

また，直線 $y=ax+b$ が点 $(3,\ 0)$ を通るので，$b=-3a=\frac{9\sqrt{6}}{8}$．

(2) l と C の交点の x 座標を求めると，

$$-x+3=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$1<x<3$ において，両辺ともに正であり，平方しても同値であるから

$$(-x+3)^2=\frac{1}{x-1}$$

$$\iff (x^2-6x+9)(x-1)=1$$

$$\iff x^3-7x+15x-10=0$$

$$\iff (x-2)(x^2-5x+5)=0$$

$$\iff x=2,\ \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

このうち，$1<x<3$ を満たすのは $x=2,\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ であり，交点の座標は

$$(2,\ 1),\ \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

いま，$\frac{5-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq 2$ において，$-x+3\geqq\frac{1}{x-1}$ であるから，求める面積 S は，

$$S=\int_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^{2}\left\{(-x+3)-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x-2\sqrt{x-1}\right]_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^{2}$$

$$=(-2+6-2)-\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2+3\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{2}-2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}-1}\right\}$$

$$=2+\frac{1}{8}(30-10\sqrt{5})-\frac{15-3\sqrt{5}}{2}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$=2+\frac{15}{4}-\frac{5\sqrt{5}}{4}-\frac{15}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5}-1=\frac{5\sqrt{5}-11}{4}$$

［5］

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OB 上に点 D をとり，線分 AD と線分 AB のなす角を x で表す．また，辺 OC の中点を E とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AO}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ および $\tan x$ を用いて表しなさい．

(2) $\angle\mathrm{DAE}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta$ を x を用いて表し，$\cos\theta$ の最大値を求めなさい．

(3) 三角形 ADE の面積を $\tan x$ の関数として表し，その面積の最小値を与える $\tan x$ の値を求めなさい．

解答 (1) $\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a}+\frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c}$

(2) $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x+\frac{2}{3}\sin x$，最大値 $\frac{\sqrt{7}}{3}$

(3) 面積 $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6-4\sqrt{3}\tan x+5\tan^2 x}{3+2\sqrt{3}\tan x+\tan^2 x}}$，$\tan x=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

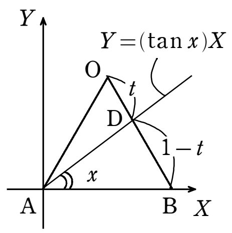
【解説】

(1) △OAB において，右の図のように座標軸を設定する．

OD:DB$=t:(1-t)$ と置くとき，点 D は XY 座標上において 2 直線 $Y=(\tan x)X$，$Y=-\sqrt{3}(X-1)$ の交点なので，

$$(\tan x)X=-\sqrt{3}(X-1)$$

$$\iff X=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan x}\cdots\cdots①$$



また，点 D の X 座標は t を用いて表すと，

$$X=\frac{1}{2}+\frac{t}{2}$$

であるから，

$$\frac{1}{2}+\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan x} \iff t=\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}$$

点 D は OB を $t:(1-t)$ に内分する点なので，

$$\overrightarrow{AD}=(1-t)\overrightarrow{AO}+t\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a}+\frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c}$$

【(1) の別解】

$$\mathrm{OD}:\mathrm{DB}=(\triangle\mathrm{OAD}\text{の面積}):(\triangle\mathrm{BAD}\text{の面積})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right):\frac{1}{2}\cdot1\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin x$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right):\sin x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x:\sin x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\tan x:\tan x$$

よって，$\overrightarrow{AD}=\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{a}+\frac{2\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\vec{c}$

(2) $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AE}|}$ である．(1) より

$$\mathrm{AD}=X\times\frac{1}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\tan x)\cos x}\quad(\because\ ①)$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\{t\vec{a}+(1-t)\vec{c}\}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\{t\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}+(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-t)|\vec{c}|^2\}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$，$|\vec{c}|=1$ なので

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{3-t}{4}$$

したがって，

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{3}\left(3-\frac{\sqrt{3}-\tan x}{\sqrt{3}+\tan x}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\tan x)\cos\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\cos x\{3(\sqrt{3}+\tan x)-(\sqrt{3}-\tan x)\}}{6}$$

$$=\frac{\cos x(2\sqrt{3}+4\tan x)}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x+\frac{2}{3}\sin x$$

また，このとき，

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}\sin(x+\alpha)\quad\left(\text{ただし}\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる．$0<x<\frac{\pi}{3}$ で x を変化させるとき，$x+\alpha=\frac{\pi}{2}$ となる x があり，$\cos\theta$ の最大値は $\frac{\sqrt{7}}{3}$．

(3) (2) より $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x+\frac{2}{3}\sin x$ であるから，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x+\frac{2}{3}\sin x\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2 x-\frac{4\sqrt{3}}{9}\sin x\cos x-\frac{4}{9}\sin^2 x}$$

これを用いて，△ADE の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+\tan x)\cos x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2 x-\frac{4\sqrt{3}}{9}\sin x\cos x-\frac{4}{9}\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+\tan x}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{9}\tan x-\frac{4}{9}\tan^2 x}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6-4\sqrt{3}\tan x+5\tan^2 x}{3+2\sqrt{3}\tan x+\tan^2 x}}$$

ここで，$1+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x=t$ とおくとき

$$f(t)=\frac{6-4\sqrt{3}\tan x+5\tan^2 x}{3+2\sqrt{3}\tan x+\tan^2 x}=\frac{6-4\sqrt{3}(\sqrt{3}t-\sqrt{3})+5(\sqrt{3}t-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}+\tan x)^2}$$

$$=\frac{6-12t+12+15(t^2-2t+1)}{(\sqrt{3}t)^2}=\frac{15t^2-42t+33}{3t^2}=\frac{5t^2-14t+11}{t^2}$$

$$=\frac{11}{t^2}-\frac{14}{t}+5=11\left(\frac{1}{t}-\frac{7}{11}\right)^2+\frac{6}{11}$$

したがって，$S=\frac{1}{4}\sqrt{f(t)}$ は $t=\frac{11}{7}$ のとき，最小値 $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{11}}$ をとる．

このとき，$\tan x=\sqrt{3}(t-1)=\frac{4\sqrt{3}}{7}$．

【講評】

1 2（小問集合）
例年通りの小問集合であり，すべて基本問題といってよい． 1 問も落とせない．

3（平面図形）
計算が煩雑だが， マークシートであることを考えると，(2) までは正解したい．

4（数Ⅲ微分法，積分法）
方針は極めて基本的であるが，計算を確実に実行できるかが問われる．

5（空間ベクトル）
計算が非常に煩雑であり，得点は難しい問題．方針は立てられても，複雑な計算を最後までやり切れるかが問われる． (1) も平面図形における発想を必要とし，今回の大問の中で一番難しい問題だったと考えられる．

全体として，計算力・計算速度が問われる出題になっている．計算を間違ってしまうと，時間が足りなくなる．ただし，1 2は非常に簡単な問題であるため，ここを素早く解くことができるかがポイントになる．5以外はしっかり点数を取りたい．計算ミスなども考慮すると，一次合格ラインは65%程度と考えられる．