医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

埼玉医科大学（後期）　数学

2019年 2月17日実施

$\boxed{1}$ 次の問い（問 1〜3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

問 1　実数 a，b および整数 x，y が

$$(a+b+x)^2+(-2a+3b+y)^2=0$$
$$3x+4y=1$$

を満たすものとする．

$$|x+y|=5$$

が成り立つとき

$$a=\frac{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}}{\boxed{4}},\ b=\frac{\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}}{\boxed{8}}$$

または

$$a=\frac{\boxed{9}\boxed{10}}{\boxed{11}},\ b=\frac{\boxed{12}\boxed{13}}{\boxed{14}}$$

である．

問 2　4 点 A(0, 0)，B(4, 0)，C(4, 3)，D(0, 3) と円 $x^2+y^2=9$ がある．円周上の任意の点を P$(x,\ y)$ とし，$L=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2+\mathrm{PD}^2$ とする．このとき，L の最小値は

$$L=\boxed{15}\boxed{16}$$

であり，最大値は

$$L=\boxed{17}\boxed{18}\boxed{19}$$

である．

問 3　すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ が，y を任意の実数，a を定数として

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy+6$$
$$f'(0)=a$$

を満たすとき，

$$f'(x)=\boxed{20}x+a$$
$$f(x)=\boxed{21}x^2+ax-\boxed{22}$$

である．またこのとき，2 次不等式 $f(x)<0$ の解が $-\dfrac{3}{4}<x<2$ であるとすると，

$$a=\boxed{23}\boxed{24}$$

である．

解答

問 1　$(a+b+x)^2+(-2a+3b+y)^2=0$ において，$a+b+x$，$-2a+3b+y$ は実数であるから，

$$\begin{cases} a+b=-x \\ -2a+3b=y \end{cases} \quad \cdots ①$$

また，$|x+y|=5$ のより，$x+y=\pm 5$.

(i)　$x+y=5$ のとき

$3x+4y=1$ より，$x=19$, $y=-14$．この x, y を① に代入して，a, b を求めると，$a=\boldsymbol{\dfrac{-71}{5}}$, $b=\boldsymbol{\dfrac{-24}{5}}$.

(ii)　$x+y=-5$ のとき

$3x+4y=1$ より，$x=-21$，$y=16$．この x，y を ① に代入して，a，b を求めると，$a=\boldsymbol{\dfrac{79}{5}}$，$b=\boldsymbol{\dfrac{26}{5}}$.

問 2

$$\begin{aligned} L &= x^2+y^2+(x-4)^2+y^2+(x-4)^2+(y-3)^2+x^2+(y-3)^2 \\ &= 4(x^2+y^2)-16x-12y+50 \end{aligned}$$

$x^2+y^2=9$ より，$x=3\cos\theta$，$y=3\sin\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned} L &= 86-12(3\sin\theta+4\cos\theta) \\ &= 86-60\sin(\theta+\alpha) \qquad \left(\text{ただし, } \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

θ は実数全体を動くから，$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ であり，L の最小値は $L=\mathbf{26}$，L の最大値は $L=\mathbf{146}$.

問 3　$f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy+6 \quad \cdots ①$ とする．

① に $x=y=0$ を代入して，

$$f(0)=f(0)+f(0)+6 \Longleftrightarrow f(0)=-6$$

また，① で $y=h$ として

$$\begin{aligned} & f(x+h)=f(x)+f(h)+8xh-(-6) \\ \Longleftrightarrow & f(x+h)-f(x)=8xh+f(h)-f(0) \end{aligned}$$

$h \neq 0$ のとき，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=8x+\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$h \to 0$ とすると，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$ で右辺は収束するから，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\boldsymbol{8x+a}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx \\ &= 4x^2+ax+f(0) \\ &= \boldsymbol{4x^2+ax-6}. \end{aligned}$$

また，題意より，2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 解は $x=-\dfrac{3}{4}$，2 であるから，解と係数の関係より，$-\dfrac{3}{4}+2=-\dfrac{a}{4}$ すなわち $\boldsymbol{a=-5}$ である．

$\boxed{2}$ 次の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

空間座標の原点を O とし，3 点 A(0, 0, 3)，B(4, 0, 0)，C(0, 3, 3) の定める平面を α とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きをもつ単位ベクトルを $\overrightarrow{e_1}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きをもつ単位ベクトルを $\overrightarrow{e_2}$ とする．運動する点 P の時刻 t における位置を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + (5\cos t)\overrightarrow{e_1} + (5\sin t)\overrightarrow{e_2}$$

とする．

問 1　点 P は平面 α 上において，中心の座標が ($\boxed{25}$, $\boxed{26}$, $\boxed{27}$) で，半径が $\boxed{28}$ の円周上を動く．

問 2　点 P から yz 平面に下ろした垂線を PQ とする．点 Q は yz 平面上において，楕円

$$\left(\frac{y}{\boxed{29}}\right)^2 + \left(\frac{z - \boxed{30}}{\boxed{31}}\right)^2 = 1$$

上を動く．

問 3　点 P から zx 平面に下した垂線を PR とする．点 R は zx 平面上において，直線

$$\boxed{32}\,z + \boxed{33}\,x = 12$$

上を動く．ここで $|x| \leqq \boxed{34}$ である．

解答

問 1　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{e_2} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．このとき，$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$ なので，$\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2} = 0$ である．

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + (5\cos t)\overrightarrow{e_1} + (5\sin t)\overrightarrow{e_2} \\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (5\cos t)\overrightarrow{e_1} + (5\sin t)\overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$，$|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = 5$．すなわち点 P は平面 α 上において点 A を中心とし，半径 5 の円周上を動く．

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分表示をすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + (5\cos t)\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + (5\sin t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4\cos t\\5\sin t\\3-3\cos t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで，点 P から yz 平面に下ろした垂線の足 Q を $(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$(x,\ y,\ z) = (0,\ 5\sin t,\ 3-3\cos t)$$

したがって，

$$\begin{cases}y = 5\sin t\\ z = 3-3\cos t\end{cases} \iff \begin{cases}\sin t = \dfrac{y}{5}\\ \cos t = \dfrac{3-z}{3}\end{cases}$$

これらを $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ に代入すると，

$$\left(\frac{y}{5}\right)^2 + \left(\frac{z-3}{3}\right)^2 = 1$$

したがって，点 Q は yz 平面上において，楕円 $\left(\dfrac{y}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{z-3}{3}\right)^2 = 1$ を動く．

問 3　問 2 と同様に，点 P から zx 平面に下した垂線の足 R を $(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$\begin{cases}x = 4\cos t\\ z = 3-3\cos t\end{cases} \iff \begin{cases}\cos t = \dfrac{x}{4}\\ \cos t = \dfrac{3-z}{3}\end{cases}$$

$-1 \leqq \cos t \leqq 1$ であるから，

$$\left|\frac{x}{4}\right| \leqq 1 \iff |x| \leqq 4$$

このとき，

$$\frac{x}{4} = \frac{3-z}{3} \iff 4z + 3x = 12$$

$\boxed{3}$ 次の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

半径 1 の円を C とする．

問 1　$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\dfrac{\pi}{4}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であることを用いると

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\boxed{35}}-\sqrt{\boxed{36}}}{\boxed{37}},\ \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\boxed{38}}+\sqrt{\boxed{39}}}{\boxed{40}}$$

（ただし，$\boxed{38}>\boxed{39}$）である．

また，関係式 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ を用いると，

$$\tan\frac{\pi}{24}=\sqrt{\boxed{41}}-\sqrt{\boxed{42}}+\sqrt{\boxed{43}}-\boxed{44}$$

（ただし，$\boxed{41}>\boxed{43}$）である．

問 2　C に内接する正六角形の面積は

$$\frac{\boxed{45}\sqrt{\boxed{46}}}{\boxed{47}}$$

であり，C に外接する正六角形の面積は

$$\boxed{48}\sqrt{\boxed{49}}$$

である．

問 3　C に外接する正二十四角形の面積は

$$\boxed{50}\left(\sqrt{\boxed{51}}-\sqrt{\boxed{52}}\right)$$

であり，C に内接する正二十四角形の面積は

$$\boxed{53}\,\boxed{54}\left(\sqrt{\boxed{55}}-\sqrt{\boxed{56}}+\sqrt{\boxed{57}}-\boxed{58}\right)$$

（ただし，$\boxed{55}>\boxed{57}$）である．

解答

問 1

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12}&=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\\\cos\frac{\pi}{12}&=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

また，$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$ において，$\theta=\dfrac{\pi}{12}$ とする．

$\tan\dfrac{\pi}{24}>0$，$\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{12}}{\sin\dfrac{\pi}{12}}>0$ より，

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{24}&=\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{12}}{\sin\dfrac{\pi}{12}}\\&=\frac{1-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\\&=\frac{4-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\\&=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}\\&=\boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}\end{aligned}$$

問 2　円 C の中心を O とし，C に内接する正六角形の隣り合う頂点を A，B とする．

この正六角形の面積は，

$$6\triangle\mathrm{OAB}=6\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

C に外接する正六角形の隣り合う頂点を C，D とし，辺 CD の中点を M とする．

この正六角形の面積は，

$$12\triangle\mathrm{OCM}=12\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

問 3　C に内接する正二十四角形の隣り合う頂点を E，F とする．

この正二十四角形の面積は，

$$24\triangle\mathrm{OEF}=24\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\boldsymbol{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

C に外接する正二十四角形の隣り合う頂点を G，H とし，辺 GH の中点を N とする．

この正二十四角形の面積は，

$$48\triangle\mathrm{OGN}=48\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\frac{\pi}{24}=\boldsymbol{24(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2)}$$

$\boxed{4}$ 次の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

1 個のさいころを 3 回続けて投げて，出る目の数を順番に a_1，a_2，a_3 とする．

問 1　$a_1 = a_2 = a_3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{59}}{\boxed{60}\boxed{61}}$ である．

問 2　$a_1 > a_2 > a_3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{62}}{\boxed{63}\boxed{64}}$ である．

問 3　$a_1 \neq a_2$，$a_2 \neq a_3$，$a_3 \neq a_1$ であり，a_1，a_2，a_3 のうちで最も大きいものが k となる事象を E_k とするとき，確率 $P(E_k)$ は

$$P(E_k) = \frac{(k - \boxed{65})(k - \boxed{66})}{\boxed{67}\boxed{68}}$$

（ただし，$\boxed{65} > \boxed{66}$）である．

解答

さいころを 3 回投げたとき，出た目の組み合わせ $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の全ての場合の数は 6^3 通りである．

問 1　$a_1 = a_2 = a_3$ となるとき，

$$(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 6,\ 6)$$

の 6 通りの場合のみである．したがって求める確率は $\dfrac{6}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{36}}$．

問 2　$a_1 > a_2 > a_3$ となるとき，a_1，a_2，a_3 はそれぞれが異なるので，1 から 6 までの数のうち，いずれか 3 個が出たことになる．この 3 個の数字の選び方は，${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通りである．また，$a_1 > a_2 > a_3$ であることから，この数字の出る順番は 1 通りしかない．

したがって，求める確率は，$\dfrac{20 \times 1}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{54}}$．

問 3　出る目がすべて異なり，1 個は k であり，残り 2 個は k よりも小さい数である．すなわち，1 から $k-1$ までの数のうち，いずれか 2 個が出るので，その選び方は ${}_{k-1}\mathrm{C}_2$ 通りである．このとき，異なる 3 つの数が a_1，a_2，a_3 となるので，その対応を考えると，3! 通りである．

したがって，求める確率は $\dfrac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2 \cdot 3!}{6^3} = \boldsymbol{\dfrac{(k-2)(k-1)}{72}}$．

講評

大問が 4 問あり，大問 1 が小問集合という構成は例年通りである．

1 小問集合（数と式，図形と方程式，微分法）

計算ミスに注意したい．問 3 は経験があれば苦はないだろう．

2 空間ベクトル・軌跡

とっつきにくい問題だが，成分表示してみると問題の内容は理解できるだろう．

3 三角関数

前半の誘導をうまく使えば，面積を求める際の計算量を減らせる．

4 確率

典型問題なので落とせない．問 3 の意味がとりづらいかもしれないが，経験があってほしい．テキストで何度も扱った問題である．

総じて典型的で手が動かしやすいセットだった．60 分という限られた時間の中でミスなく解答する力が試された．75 %は取らなければならないだろう．

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録
LINE 登録