$\boxed{1}$ 次の問い(問1～3)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ.

問1 実数 a, b および整数 x, y が

$$(a+b+x)^2+(-2a+3b+y)^2=0$$
$$3x+4y=1$$

を満たすものとする.

$$|x+y|=5$$

が成り立つとき

$$a=\frac{\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}}{\boxed{4}},\quad b=\frac{\boxed{5}\,\boxed{6}\,\boxed{7}}{\boxed{8}}$$

または

$$a=\frac{\boxed{9}\,\boxed{10}}{\boxed{11}},\quad b=\frac{\boxed{12}\,\boxed{13}}{\boxed{14}}$$

である.

解答 $a=\dfrac{-71}{5}$, $b=\dfrac{-24}{5}$, $a=\dfrac{79}{5}$, $b=\dfrac{26}{5}$

問1 $(a+b+x)^2+(-2a+3b+y)^2=0$ において, $a+b+x$, $-2a+3b+y$ は実数であるから,

$$\begin{cases} a+b=-x \\ -2a+3b=-y \end{cases} \quad \cdots①$$

また, $|x+y|=5$ より, $x+y=\pm 5$

(i) $x+y=5$ のとき,

$3x+4y=1$ より, $x=19$, $y=-14$

この x, y を①に代入して, a, b を求めると,

$$a=\frac{-71}{5},\quad b=\frac{-24}{5}$$

(ii) $x+y=-5$ のとき,

$3x+4y=1$ より, $x=-21$, $y=16$

この x, y を①に代入して, a, b を求めると,

$$a=\frac{79}{5},\quad b=\frac{26}{5}$$

問2 4点 A$(0,\ 0)$, B$(4,\ 0)$, C$(4,\ 3)$, D$(0,\ 3)$ と円 $x^2+y^2=9$ がある. 円周上の任意の点を P$(x,\ y)$ とし, $L=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2+\mathrm{PD}^2$ とする. このとき, L の最小値は

$$L=\boxed{15}\,\boxed{16}$$

であり, 最大値は

$$L=\boxed{17}\,\boxed{18}\,\boxed{19}$$

である.

解答 $L=26$, $L=146$

問2 $L=x^2+y^2+(x-4)^2+y^2+(x-4)^2+(y-3)^2+x^2+(y-3)^2$

$=4(x^2+y^2)-16x-12y+50$

$x^2+y^2=9$ より, $x=3\cos\theta$, $y=3\sin\theta$ とおくと,

$$L=86-12(3\sin\theta+4\cos\theta)$$
$$=86-60\sin(\theta+\alpha) \qquad \left(\text{ただし, } \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}\right)$$

θ は実数全体を動くから, $-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$ であり,

L の最小値は $L=26$, L の最大値は $L=146$

問3 すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ が, y を任意の実数 a を定数として

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy+6$$
$$f'(0)=a$$

を満たすとき,

$$f'(x)=\boxed{20}\,x+a$$
$$f(x)=\boxed{21}\,x^2+ax-\boxed{22}$$

である. またこのとき, 2次不等式 $f(x)<0$ の解が $-\dfrac{3}{4}<x<2$ であるとすると,

$$a=\boxed{23}\,\boxed{24}$$

である.

解答 $f'(x)=8x+a$, $f(x)=4x^2+ax-6$, $a=-5$

問3 $f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy+6$ $\cdots①$ とする.

①に $x=y=0$ を代入して,

$$f(0)=f(0)+f(0)+6 \iff f(0)=-6$$

また, ①で $y=h$ として,

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+8xh-(-6)$$
$$\iff f(x+h)-f(x)=8xh+f(h)-f(0)$$

$h\fallingdotseq 0$ のとき,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=8x+\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$h\longrightarrow 0$ とすると, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$ で右辺は収束するから,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=8x+a$$

したがって,

$$f(x)=\int f'(x)dx=4x^2+ax+f(0)=4x^2+ax-6$$

また, 題意より, 2次方程式 $f(x)=0$ の2解は $x=-\dfrac{3}{4}$, 2であるから, 解と係数の関係により,

$$-\frac{3}{4}+2=-\frac{a}{4} \iff a=-5$$

2 次の文章を読み，下の問い（問 1 ～ 3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

空間座標の原点を O とし，3 点 A$(0,\ 0,\ 3)$，B$(4,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 3,\ 3)$ の定める平面を α とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きをもつ単位ベクトルを $\vec{e_1}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きをもつ単位ベクトルを $\vec{e_2}$ とする．運動する点 P の時刻 t における位置を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(5\cos t)\vec{e_1}+(5\sin t)\vec{e_2}$$

とする．

問 1　点 P は平面 α 上において，中心の座標が $(\boxed{25},\ \boxed{26},\ \boxed{27})$ で，半径が $\boxed{28}$ の円周上を動く．

問 2　点 P から yz 平面に下ろした垂線を PQ とする．点 Q は yz 平面上において，楕円

$$\left(\frac{y}{\boxed{29}}\right)^2+\left(\frac{z-\boxed{30}}{\boxed{31}}\right)^2=1$$

上を動く．

問 3　点 P から zx 平面に下ろした垂線を PR とする．点 R は zx 平面上において，直線

$$\boxed{32}z+\boxed{33}x=12$$

上を動く．ここで $|x|\leqq\boxed{34}$ である．

解答　問 1　$(0,\ 0,\ 3)$，5　問 2　$\left(\frac{y}{5}\right)^2+\left(\frac{z-3}{3}\right)^2=1$　問 3　$4z+3x=12$，$|x|\leqq4$

問 1　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

であるから，

$$\vec{e_1}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{e_2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

となる．このとき，$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0$ なので，$\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(5\cos t)\vec{e_1}+(5\sin t)\vec{e_2}$$
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(5\cos t)\vec{e_1}+(5\sin t)\vec{e_2}$$

$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0$，$|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=5$．すなわち点 P は 平面 α 上において点 A を中心とし，半径 5 の円周上を動く．

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分表示すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}+(5\cos t)\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+(5\sin t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cos t\\5\sin t\\3-3\cos t\end{pmatrix}$$

ここで，点 P から yz 平面に下した垂線の足 Q を $(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 5\sin t,\ 3-3\cos t)$$

したがって，

$$\begin{cases}y=5\sin t\\z=3-3\cos t\end{cases}\iff\begin{cases}\sin t=\dfrac{y}{5}\\\cos t=\dfrac{3-z}{3}\end{cases}$$

これらを $\sin^2t+\cos^2t=1$ に代入すると，

$$\left(\frac{y}{5}\right)^2+\left(\frac{z-3}{3}\right)^2=1$$

したがって，点 Q は yz 平面上において，楕円 $\left(\frac{y}{5}\right)^2+\left(\frac{z-3}{3}\right)^2=1$ 上を動く．

問 3　問 2 と同様に，点 P から zx 平面に下ろした垂線の足 R を $(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$\begin{cases}x=4\cos t\\z=3-3\cos t\end{cases}\iff\begin{cases}\cos t=\dfrac{x}{4}\\\cos t=\dfrac{3-z}{3}\end{cases}$$

$-1\leqq\cos t\leqq1$ であるから，

$$\left|\frac{x}{4}\right|\leqq1\iff|x|\leqq4$$

このとき，

$$\frac{x}{4}=\frac{3-z}{3}\iff4z+3x=12$$

的中！

2/13 埼玉（後）②直前講習会より的中!!

2 次の問い（問 1，2）に答えよ．

問 1　$x=18^\circ$ とするとき，$\sin2x=\cos3x$ により

$$\sin18^\circ=\frac{1}{\boxed{18}}\left(\sqrt{\boxed{19}}-\boxed{20}\right),$$
$$(\sin36^\circ)^2=\frac{1}{\boxed{21}}\left(\boxed{22}-\sqrt{\boxed{23}}\right)$$

を得る．

問 2　半径 1 の円に内接する正五角形の面積と，1 辺の長さが 1 である正五角形の面積はそれぞれ，

$$\frac{\boxed{24}}{\boxed{25}}\sqrt{\boxed{26}\boxed{27}+\boxed{28}\sqrt{5}},\quad \frac{\boxed{29}}{\boxed{30}}\sqrt{\boxed{31}\boxed{32}+\boxed{33}\boxed{34}\sqrt{5}}$$

である．

3 次の文章を読み，下の問い（問 1 ～ 3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

半径 1 の円を C とする．

問 1　$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac12$，$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$ であることを用いると

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\boxed{35}}-\sqrt{\boxed{36}}}{\boxed{37}},\quad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\boxed{38}}+\sqrt{\boxed{39}}}{\boxed{40}}$$

（ただし，$\boxed{38}>\boxed{39}$）である．

また，関係式 $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ を用いると，

$$\tan\frac{\pi}{24}=\sqrt{\boxed{41}}-\sqrt{\boxed{42}}+\sqrt{\boxed{43}}-\boxed{44}$$

（ただし，$\boxed{41}>\boxed{43}$）である．

問 2　C に内接する正六角形の面積は

$$\frac{\boxed{45}\sqrt{\boxed{46}}}{\boxed{47}}$$

であり，C に外接する正六角形の面積は

$$\boxed{48}\sqrt{\boxed{49}}$$

である．

問 3　C に内接する正二十四角形の面積は

$$\boxed{50}\left(\sqrt{\boxed{51}}-\sqrt{\boxed{52}}\right)$$

であり，C に外接する正二十四角形の面積は

$$\boxed{53}\boxed{54}\left(\sqrt{\boxed{55}}-\sqrt{\boxed{56}}+\sqrt{\boxed{57}}-\boxed{58}\right)$$

（ただし，$\boxed{55}>\boxed{57}$）である．

解答　問 1　$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$，$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$，$\tan\frac{\pi}{24}=\sqrt6-\sqrt3+\sqrt2-2$

問 2　$\frac{3\sqrt3}{2}$，$2\sqrt3$　問 3　$3(\sqrt6-\sqrt2)$，$24(\sqrt6-\sqrt3+\sqrt2-2)$

問 1

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$$
$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$$

また，$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$ において，$\theta=\frac{\pi}{12}$ とする．

$$\tan\frac{\pi}{24}>0,\quad \frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}>0 \text{ より，}$$

$$\tan\frac{\pi}{24}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=\frac{4-(\sqrt6+\sqrt2)}{\sqrt6-\sqrt2}$$
$$=\frac{4(\sqrt6+\sqrt2)-(\sqrt6+\sqrt2)^2}{4}=\sqrt6-\sqrt3+\sqrt2-2$$

問2　円 C の中心を O とし，C に内接する正六角形の隣り合う頂点を A，B とする．

この正六角形の面積は，

$$6\triangle \mathrm{OAB}=6\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

C に外接する正六角形の隣り合う頂点を C，D とし，辺 CD の中点を M とする．

この正六角形の面積は，

$$12\triangle \mathrm{OCM}=12\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$$

問3　C に内接する正二十四角形の隣り合う頂点を E，F とする．

この正二十四角形の面積は，

$$24\triangle \mathrm{OEF}=24\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{12}=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

C に外接する正二十四角形の隣り合う頂点を G，H とし，辺 CD の中点を N とする．

この正二十四角形の面積は，

$$48\triangle \mathrm{OGN}=48\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\frac{\pi}{24}=24(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2)$$

$\boxed{4}$　次の文章を読み，下の問い（問1～3）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

1個のさいころを3回続けて投げて，出る目の数を順番に a_1，a_2，a_3 とする．

問1　$a_1=a_2=a_3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{59}}{\boxed{60}\boxed{61}}$ である．

問2　$a_1>a_2>a_3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{62}}{\boxed{63}\boxed{64}}$ である．

問3　$a_1\neq a_2$，$a_2\neq a_3$，$a_3\neq a_1$ であり，a_1，a_2，a_3 のうちで最も大きいものが k となる事象を E_k とするとき，確率 $P(E_k)$ は

$$P(E_k)=\frac{(k-\boxed{65})(k-\boxed{66})}{\boxed{67}\boxed{68}}$$

（ただし，$\boxed{65}>\boxed{66}$）である．

解答　問1 $\dfrac{1}{36}$　問2 $\dfrac{5}{54}$　問3 $\dfrac{(k-2)(k-1)}{72}$

さいころを3回投げたとき，出た目の組み合わせ $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の全ての場合の数は 6^3 通りである．

問1　$a_1=a_2=a_3$ となるとき，

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 6,\ 6)$$

の6通りの場合のみである．したがって求める確率は

$$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

問2　$a_1>a_2>a_3$ となるとき，a_1，a_2，a_3 はそれぞれが異なるので，1から6までの数のうち，いずれか3個が出たことになる．この3個の数字の選び方は，

$${}_6C_3=20\text{（通り）}$$

である．また，$a_1>a_2>a_3$ であることから，この数字の出る順番は1通りしかない．

したがって，求める確率は，

$$\frac{20\times1}{6^3}=\frac{5}{54}$$

問3　出る目がすべて異なり，1個は k であり，残り2個は k よりも小さい数である．

すなわち，1から $k-1$ までの数のうち，いずれか2個が出るので，その選び方は ${}_{k-1}\mathrm{C}_2$ 通りである．このとき，異なる3つの数が a_1，a_2，a_3 となるので，その対応を考えると，$3!$ 通りである．

したがって，求める確率は，

$$\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2\cdot3!}{6^3}=\frac{(k-2)(k-1)}{72}$$

【講評】

大問が4題あり，大問 $\boxed{1}$ が小問集合という構成は例年通りである．

大問 $\boxed{1}$　小問集合（数と式，図形と方程式，微分法）

計算ミスに注意したい．問3は経験があれば苦はないだろう．

大問 $\boxed{2}$　空間ベクトル・軌跡

とっつきにくい問題だが，成分表示してみると問題の内容は理解できるだろう．

大問 $\boxed{3}$　三角関数

前半の誘導を上手く使えば，面積を求める際の計算量を減らせる．

大問 $\boxed{4}$　確率

典型問題なので落とせない．問3の意味がとりづらいかもしれないが，経験があって欲しい．テキストで何度も扱った問題である．

総じて典型的で手が動かしやすいセットだった．60分という限られた時間の中でミスなく解答する力が試された．７５％は取らなければならないだろう．

マークの際に，数の大小指定の間違いや，$\boxed{32}$ と $\boxed{33}$ の順番間違いがあると苦しい．