［Ⅰ］ 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

(1) 関数

$$y=2\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

は $\theta=$ $\boxed{（あ）}$ のとき最大値 $\boxed{（い）}$ をとる．

(2) 赤玉1個，白玉2個，黒玉3個が入った袋が1つある．はじめにK君がこの袋から同時に2個の玉を取り出す．次に，K君が取り出した玉をもとに戻さずに，O君が袋から同時に2個の玉を取り出す．この試行において

「K君が取り出した2個の玉が同じ色である」という事象を A，

「O君が取り出した2個の玉が同じ色である」という事象を B

とする．このとき，A と B の積事象 $A\cap B$ の確率は $\boxed{（う）}$ であり，和事象 $A\cup B$ の確率は $\boxed{（え）}$ である．

(3) 座標空間に3点 A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, −3) を考えるとき，三角形ABCの面積は $\boxed{（お）}$ である．また，3点A, B, Cからの距離が等しい点 P$(x,\ y,\ z)$ はすべて同一直線上にある．この直線に平行な単位ベクトル $\vec{p}$ で，正の x 成分をもつものを求めると $\vec{p}=\left(\boxed{（か）},\ \boxed{（き）},\ \boxed{（く）}\right)$ となる．

【解説】

(1)

$$y=2\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

$$y=2\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sin2\theta}{2}-\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta+\frac{3}{2}\cos2\theta+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin2\theta-\sqrt{3}\cos2\theta)+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$$

$$=-\sqrt{3}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから，$-\frac{\pi}{3}\leqq2\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5}{3}\pi$ であり，$2\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$ のとき，すなわち $\theta=\frac{11}{12}\pi$ のときに最大値 $\sqrt{3}+\frac{1}{2}$ をとる．

(2) K君が2個の玉をとり，そのあとでO君が2個の玉を取り出すすべての場合の数は，

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2=90\text{（通り）}$$

$\boxed{A\cap B}$ 二人とも取り出した2個の玉が同じ色である事象は，以下の2通りがある．

（ⅰ） K君が白玉を2個取り出し，O君が黒玉を2個取り出す

（ⅱ） K君が黒玉を2個取り出し，O君が白玉を2個取り出す

したがって，

$${}_2C_2\cdot{}_3C_2+{}_3C_2\cdot{}_2C_2=6\text{（通り）}$$

であり，求める確率は，

$$P(A\cap B)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

$\boxed{A\cup B}$ 二人の少なくとも一方が，取り出した2個の玉が同じ色である事象を考える．

事象 A の場合の数は，K君が取り出した2個の玉が同じ色のときなので，

（ⅰ） K君が白玉を2個取り出すとき，（ⅱ） K君が黒玉を2個取り出すとき

$${}_2C_2\cdot{}_4C_2+{}_3C_2\cdot{}_4C_2=24\text{（通り）}$$

したがって，

$$P(A)=\frac{24}{90}=\frac{4}{15}$$

また，くじ引きの確率なので，

$$P(A)=P(B)=\frac{4}{15}$$

である．

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{4}{15}+\frac{4}{15}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$$

(3)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$$

△ABCの面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot10-1}=\frac{7}{2}$$

また，3点A，B，Cを通る平面の方程式は，3点が x 軸，y 軸，z 軸上にあるので，

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1 \iff 6x+3y-2z=-6$$

したがって，平面ABCの法線ベクトルの一つを $\vec{n}$ とすると，

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}$$

したがって，求める単位ベクトル $\vec{p}$ は，

$$\vec{p}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}$$

［Ⅱ］ 以下の文章の空欄に，文字 n を含まない適切な数を入れて文章を完成させなさい.

四角形 ABCD の頂点上に置かれた点 P に対する次の操作 T を考える.

操作 T

（T1） 点 P が頂点 A 上に置かれているときは，確率 $\frac{1}{3}$ でそのままにしておき，確率 $\frac{2}{3}$ で頂点 B 上に移す.

（T2） 点 P が頂点 B 上に置かれているときは，確率 $\frac{1}{3}$ ずつで，他の 3 つの頂点のいずれかの上に移す.

（T3） 点 P が頂点 C または D 上に置かれているときは，そのままにしておく.

以下，n を自然数とし，点 P を頂点 B 上に置いて，操作 T を繰り返し行う．操作 T を n 回繰り返し終えたとき，点 P が頂点 A 上に置かれている確率を p_n，頂点 C 上に置かれている確率を q_n とする.

(1) $n \geqq 3$ のとき，p_n を p_{n-1}，p_{n-2} で表すと $p_n = \boxed{（あ）}\, p_{n-1} + \boxed{（い）}\, p_{n-2}$ である.

(2) $n \geqq 3$ のとき，$p_n - \boxed{（う）}\, p_{n-1} = \boxed{（え）}\left(p_{n-1} - \boxed{（う）}\, p_{n-2}\right)$ である.

ただし，$\boxed{（う）} > 0$，$\boxed{（え）} < 0$ である.

(3) $n \geqq 2$ のとき，$p_n - \boxed{（う）}\, p_{n-1}$ を n の式で表すと

$$p_n - \boxed{（う）}\, p_{n-1} = \boxed{（お）}\left(\boxed{（か）}\right)^n$$

である.

(4) p_n を n の式で表すと

$$p_n = \boxed{（き）}\left(\boxed{（く）}\right)^n + \boxed{（け）}\left(\boxed{（こ）}\right)^n$$

である．ただし，$\boxed{（く）} > 0$，$\boxed{（こ）} < 0$ である.

(5) q_n を n の式で表すと

$$q_n = \boxed{（さ）} + \boxed{（し）}\left(\boxed{（す）}\right)^n + \boxed{（せ）}\left(\boxed{（そ）}\right)^n$$

である．ただし，$\boxed{（す）} > 0$，$\boxed{（そ）} < 0$ である.

(1) $n-2$ 回目から n 回目の推移は，

操作 T により A にいる直前では A または B にしかいない

B にいる直前では A にしかいない

ことに注意すれば以下のようになる.

$n-2$ 回目	$n-1$ 回目	n 回目
	$\mathrm{A}(p_{n-1})$ →	
		$\mathrm{A}(p_n)$
$\mathrm{A}(p_{n-2})$ →	B ↗	

よって，$n \geqq 3$ で

$$p_n = p_{n-1} \cdot \frac{1}{3} + p_{n-2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$p_n = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{2}{9} p_{n-2} \quad \cdots①$$

(2) ① は次のように変形できる.

$$p_n - \frac{2}{3} p_{n-1} = -\frac{1}{3}\left(p_{n-1} - \frac{2}{3} p_{n-2}\right) \quad \cdots②$$

$$p_n + \frac{1}{3} p_{n-1} = \frac{2}{3}\left(p_{n-1} + \frac{1}{3} p_{n-2}\right) \quad \cdots③$$

(3) ② より，数列 $\left\{p_n - \frac{2}{3} p_{n-1}\right\}$ は初項 $p_2 - \frac{2}{3} p_1$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列をなすことがわかる.

$$p_n - \frac{2}{3} p_{n-1} = \left(p_2 - \frac{2}{3} p_1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

ここで，$p_1 = \frac{1}{3}$，$p_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ であるから，

$$p_n - \frac{2}{3} p_{n-1} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots④$$

(4) 一方 ③ より，数列 $\left\{p_n + \frac{1}{3} p_{n-1}\right\}$ は初項 $p_2 + \frac{1}{3} p_1 = \frac{2}{9}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列をなすことがわかるので，

$$p_n + \frac{1}{3} p_{n-1} = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \cdots⑤$$

④，⑤ より

$$p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots⑥$$

(5) $n \geqq 2$ において B にいる確率は $\frac{2}{3} p_{n-1}$ であり，⑥ に $n=0$ を代入することで得られる $p_0 = 0$ を用いて $n=1$ のとき B にいる確率を表すことができる.

したがって，操作 T を n 回繰り返し終えたとき，点 P が頂点 C または D にいる確率を Q_n とおけば，$n \geqq 1$ で

$$Q_n = 1 - p_n - \frac{2}{3} p_{n-1}$$

$$= 1 - \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

頂点 C にいる確率と頂点 D にいる確率は対等なので，

$$q_n = \frac{1}{2} Q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

[Ⅲ] 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．また設問(5)に答えなさい．

座標平面上の原点を O とする．

(1) O を焦点とし，直線 $y=-1$ を準線とする放物線の方程式は $y=\boxed{(あ)}$ である．

(2) 点 P が放物線 $y=\boxed{(あ)}$ 上を動くとき

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{|\overrightarrow{OP}|^2}\overrightarrow{OP}$$

により定まる点 Q が描く曲線 C 上の点の x 座標，y 座標のとりうる値の範囲はそれぞれ

$$-\boxed{(い)}\leqq x\leqq\boxed{(い)},\quad \boxed{(う)}\leqq y\leqq\boxed{(え)}$$

である．

(3) 曲線 C の $y\leqq 0$ の部分の長さは $\boxed{(お)}$ である．

(4) 正の実数 a に対して，直線 $y=ax$ は曲線 C と 2 つの共有点をもつ．その 2 つの共有点を結ぶ線分の中点 M_a の座標を a を用いて表すと $\left(\boxed{(か)},\ \boxed{(き)}\right)$ である．

(5) a が正の実数全体を動くとき，

$$\overrightarrow{ON_a}=\frac{1}{|\overrightarrow{OM_a}|^2}\overrightarrow{OM_a}$$

により定まる点 N_a の軌跡を図示しなさい．

(1) 焦点と準線との距離が 1 であり，放物線の頂点は $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である．したがって，

$p=\dfrac{1}{2}$ として，求める放物線は $x^2=4py$ を y 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$ 平行移動したものである．

$$x^2=4\cdot\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right) \iff y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

(2) 点 P が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ 上にあるとき，実数 p を用いて $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{p^2-1}{2}\right)$ とおける．

$$|\overrightarrow{OP}|^2=p^2+\left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(p^2+1)^2$$

であるから，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{|\overrightarrow{OP}|^2}\overrightarrow{OP}=\frac{4}{(p^2+1)^2}\begin{pmatrix}p\\ \dfrac{p^2-1}{2}\end{pmatrix}$$

点 Q を $(X,\ Y)$ とおくとき，$X=\dfrac{4p}{(p^2+1)^2}$，$Y=\dfrac{2(p^2-1)}{(p^2+1)^2}$ である．

$$\frac{dX}{dp}=4\cdot\frac{1-3p^2}{(p^2+1)^3},\quad \frac{dY}{dp}=4\cdot\frac{p(3-p^2)}{(p^2+1)^3}$$

p	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$\dfrac{dX}{dp}$	$-$	0	$+$	0	$-$
X	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘

p	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$\dfrac{dY}{dp}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Y	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	-2	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘

$\displaystyle\lim_{p\to\pm\infty}X=0$，$\displaystyle\lim_{p\to\pm\infty}Y=0$ であるから，

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}\leqq X\leqq\frac{3\sqrt{3}}{4},\quad -2\leqq Y\leqq\frac{1}{4}.$$

(3) 曲線 C の $y\leqq 0$ の部分の長さを L とおく．$y\leqq 0$ より

$$y=\frac{2(p^2-1)}{(p^2+1)^2}\leqq 0 \iff -1\leqq p\leqq 1$$

したがって，

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{dX}{dp}\right)^2+\left(\frac{dY}{dp}\right)^2}\,dp$$

ここで，

$$\left(\frac{dX}{dp}\right)^2+\left(\frac{dY}{dp}\right)^2=16\cdot\frac{(1-3p^2)^2}{(p^2+1)^6}+16p^2\cdot\frac{(3-p^2)^2}{(p^2+1)^6}$$

$$=\frac{16(p^6+3p^4+3p^2+1)}{(p^2+1)^6}$$

$$=\frac{16}{(p^2+1)^3}$$

であり，

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{16}{(p^2+1)^3}}\,dp=8\int_0^1\sqrt{\frac{1}{(p^2+1)^3}}\,dp$$

ここで，$p=\tan\theta$ とおくと，$dp=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

p	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

であるから，

$$L=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta=4\sqrt{2}$$

(4) 点 Q が直線 $y=ax$ 上にあるとき，

$$\frac{2(p^2-1)}{(p^2+1)^2}=a\cdot\frac{4p}{(p^2+1)^2} \iff p^2-2ap-1=0\quad\cdots①$$

方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもち，これを p_1，p_2 とおく．これに対応する点を

$$\mathrm{Q}_1\left(\frac{4p_1}{({p_1}^2+1)^2},\ \frac{2({p_1}^2-1)}{({p_1}^2+1)^2}\right),\quad \mathrm{Q}_2\left(\frac{4p_2}{({p_2}^2+1)^2},\ \frac{2({p_2}^2-1)}{({p_2}^2+1)^2}\right)$$

とおく．線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の中点が M_a であり，この座標を $(s,\ t)$ とおく．① を利用して

$$2s=\frac{4p_1}{({p_1}^2+1)}+\frac{4p_2}{({p_2}^2+1)}=\frac{4p_1}{\{(2ap_1+1)+1\}^2}+\frac{4p_2}{\{(2ap_2+1)+1\}^2}$$

$$=\frac{p_1}{(ap_1+1)^2}+\frac{p_2}{(ap_2+1)^2}=\frac{p_1}{a^2{p_1}^2+2ap_1+1}+\frac{p_2}{a^2{p_2}^2+2ap_2+1}$$

$$=\frac{p_1}{a^2{p_1}^2+{p_1}^2}+\frac{p_2}{a^2{p_2}^2+{p_2}^2}=\frac{1}{a^2+1}\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)$$

p_1，p_2 は方程式 ① の解なので，解と係数の関係から，

$$p_1+p_2=2a,\quad p_1p_2=-1$$

したがって，

$$2s=\frac{1}{a^2+1}\cdot\frac{p_1+p_2}{p_1p_2}=\frac{-2a}{a^2+1} \iff s=\frac{-a}{a^2+1}$$

また，

$$2t=\frac{2({p_1}^2-1)}{({p_1}^2+1)^2}+\frac{2({p_2}^2-1)}{({p_2}^2+1)^2}=\frac{{p_1}^2-1}{2(a^2+1){p_1}^2}+\frac{{p_2}^2-1}{2(a^2+1){p_2}^2}$$

ゆえに，

$$t=\frac{1}{4(a^2+1)}\left(2-\frac{{p_1}^2+{p_2}^2}{{p_1}^2{p_2}^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4(a^2+1)}\left\{2-\frac{(p_1+p_2)^2-2p_1p_2}{{p_1}^2{p_2}^2}\right\}$$

$$=\frac{-a^2}{a^2+1}$$

よって，$M_a\left(\dfrac{-a}{a^2+1},\ \dfrac{-a^2}{a^2+1}\right)$.

(5)

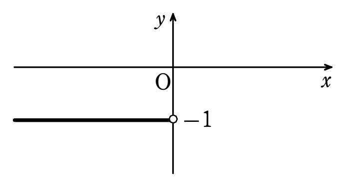
$$|\overrightarrow{OM_a}|^2=\frac{1}{(a^2+1)^2}\{(-a)^2+(-a^2)^2\}=\frac{a^2}{a^2+1}$$

$$\overrightarrow{ON_a}=\frac{a^2+1}{a^2}\begin{pmatrix}\dfrac{-a}{a^2+1}\\ \dfrac{-a^2}{a^2+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{a}\\ -1\end{pmatrix}$$

点 N_a の座標を $(x,\ y)$ とおくとき，

$$x=-\frac{1}{a},\quad y=-1$$

であり，a が正の実数全体を動くとき，x の変域は負の実数全体である．したがって，点 N_a の軌跡は，直線 $y=-1$ の $x<0$ の部分であり，図示すると以下のようになる．



[Ⅳ] 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．ただし，空欄 $\boxed{(あ)}$ から $\boxed{(か)}$ には文字 s と t の式が入る．

座標平面の点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$（ただし，$s \fallingdotseq 0$ かつ $|t| \fallingdotseq 1$ とする）を中心として y 軸に接する円を C とし，y 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ および点 $\mathrm{B}(0,\ 1)$ から C に引いた接線で，y 軸とは異なるものをそれぞれ L_{A}，L_{B} とする．

一般に三角形の 3 頂点から対辺またはその延長上に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わり，その点を三角形の垂心という．また，点 P が正の x 座標をもつとき，点 P は右半平面にあるという．

(1) $s>0$ かつ $|t|<1$ のとき L_{A} の傾きは $\boxed{(あ)}$ であり，L_{B} の傾きは $\boxed{(い)}$ である．

(2) 点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ が，右半平面にある点 P に対する三角形 APB の内心となるための条件は

$$s>0 \text{ かつ } \boxed{(う)}$$

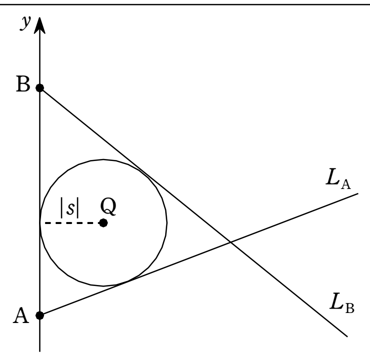
である．

(3) 三角形AQBの垂心 $\mathrm{H}(u,\ v)$ の座標を s と t の式で表すと，$u=\boxed{(え)}$，$v=\boxed{(お)}$ である．また，$s>0$ かつ $|t|<1$ のとき，点 $\mathrm{R}(-u,\ -v)$ と直線 L_{A} との距離 d を，絶対値の記号および根号をできるだけ簡単な式で表すと $d=\boxed{(か)}$ となる．

(4) 右半平面上にある点 P が，2 点 A，B を焦点とし，長軸の長さ $2a$（ただし，$a>1$ とする）の楕円上にあるとき，三角形 APB の内心 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ は方程式

$$\boxed{(き)}\,x^2+\boxed{(く)}\,x+\boxed{(け)}\,y^2+\boxed{(こ)}\,y=1$$

で表される 2 次曲線上にある．



(1) 直線 L_{A} の傾きを m とおくと，

$$L_{\mathrm{A}}: y=mx-1 \iff mx-y-1=0$$

点Q と直線 L_{A} との距離を d_{A} とするとき，

$$d_{\mathrm{A}}=\frac{|ms-t-1|}{\sqrt{m^2+1}}=|s| \quad \cdots①$$

$$\iff \{ms-(t+1)\}^2=s^2(m^2+1)$$

$$\iff 2s(t+1)m=(t+1)^2-s^2$$

$s \fallingdotseq 0$，$|t| \fallingdotseq 1$ であるから，

$$m=\frac{(t+1)^2-s^2}{2s(t+1)}$$

また，直線 L_{B} の傾きを n とおくと，

$$L_{\mathrm{B}}: y=nx+1 \iff nx-y+1=0$$

点Q と直線 L_{B} との距離を d_{B} とするとき，

$$d_{\mathrm{B}}=\frac{|ns-t+1|}{\sqrt{n^2+1}}=|s|$$

$$\iff \{ns-(t-1)\}^2=s^2(n^2+1)$$

$$\iff 2s(t-1)n=(t-1)^2-s^2$$

$s \fallingdotseq 0$，$|t| \fallingdotseq 1$ であるから，

$$n=\frac{(t-1)^2-s^2}{2s(t-1)}$$

(2) 点 P が右半平面にあるとき，△APB が $x \geqq 0$ に存在する．したがって，$s>0$ である．このとき 2 直線 L_{A} と L_{B} は $x>0$ で交わるので，その傾きから $m>n$ を満たす．

$$\frac{(t+1)^2-s^2}{2s(t+1)}>\frac{(t-1)^2-s^2}{2s(t-1)}$$

$2s>0$ を両辺にかけて整理すると，

$$t+1-\frac{s^2}{t+1}>t-1-\frac{s^2}{t-1}$$

$$\iff 2+\frac{s^2}{t-1}-\frac{s^2}{t+1}>0$$

$$\iff \frac{t^2+s^2-1}{(t-1)(t+1)}>0 \quad \cdots②$$

また，△APB の内接円 C は線分 AB と接するので，この接点 $(0,\ t)$ の y 座標から

$$-1<t<1 \quad \cdots③$$

$s>0$ と ②，③ より，求める条件は

$$s>0 \text{ かつ } s^2+t^2<1$$

(3) 点 $\mathrm{H}(u,\ v)$ とおくとき，△AQB の垂心となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{QH}} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{BQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QH}}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u-s\\v-t\end{pmatrix}=0 \iff v=t$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\begin{pmatrix}s\\t-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v+1\end{pmatrix}=0 \iff su+(t-1)(v+1)=0$$

$$\iff u=\frac{1-t^2}{s}$$

このとき，点 R の座標は $\left(\dfrac{t^2-1}{s},\ -t\right)$ である．直線 L_{A} との距離 d は，

$$d=\frac{\left|m\cdot\dfrac{t^2-1}{s}+t-1\right|}{\sqrt{m^2+1}}$$

ここで ① から $\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{|s|}{|ms-t-1|}$ である．また，点 Q，点 R がともに直線 L_{A} の上側の領域にあるので，

$$y>mx-1 \iff mx-y-1<0$$

を満たす．したがって，

$$ms-t-1<0,\ m\cdot\frac{t^2-1}{s}+t-1<0$$

であり，

$$d=\frac{\left|m\cdot\dfrac{t^2-1}{s}+t-1\right|\cdot s}{|ms-t-1|}=\frac{m(t^2-1)+s(t-1)}{ms-t-1}$$

$$=\frac{\left\{\dfrac{(t+1)^2-s^2}{2s}+s\right\}(t-1)}{\dfrac{(t+1)^2-s^2}{2(t+1)}-(t+1)}$$

$$=\frac{\{(t+1)^2-s^2+2s^2\}(t-1)(t+1)}{\{(t+1)^2-s^2-2(t+1)^2\}s}$$

$$=\frac{1-t^2}{s}$$

(4) 点 P が 2 点A，B を焦点とし，長軸の長さが $2a$ となるような楕円上にあるとき，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=2a$$

ここで，△APB の面積を S とすると，この内接円の半径 r が $r=s$ を満たすので，

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{AB})\cdot r=\frac{1}{2}(2a+2)r=(a+1)s \quad \cdots④$$

また，直線 L_{A} と L_{B} の交点 P の x 座標は

$$y=mx-1,\ y=nx+1$$

を連立し求めることができる．$m \fallingdotseq n$ であり，

$$mx-1=nx+1 \iff x=\frac{2}{m-n}$$

これが点 P と辺 AB との距離に一致し，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\frac{2}{m-n}=\frac{2}{m-n} \quad \cdots⑤$$

また，

$$m-n=\left\{\frac{t+1}{2s}-\frac{s}{2(t+1)}\right\}-\left\{\frac{t-1}{2s}-\frac{s}{2(t-1)}\right\}=\frac{t^2+s^2-1}{s(t^2-1)}$$

であるから，④，⑤ より

$$\frac{2}{m-n}=(a+1)s$$

$$\iff 2\cdot\frac{s(t^2-1)}{t^2+s^2-1}=(a+1)s$$

$$\iff 2(t^2-1)=(a+1)(t^2+s^2-1)$$

$$\iff (a+1)s^2+(a-1)t^2=a-1$$

$a>1$ であるから，点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ は方程式

$$\frac{a+1}{a-1}x^2+y^2=1$$

で表される 2 次曲線上にある．

【講評】

1 小問集合
全問正解ができるだけでなく，どれだけ早く解けたかも重要である．

2 確率漸化式
操作Tの設定も簡単であり，満点を取らなければならない．

3 積分・軌跡
方針自体は簡単だが，計算量が非常に多く，正解を出すのに時間が掛かる設定になっている．

4 図形と方程式・平面図形・楕円
計算量が多い．s と t の煩雑な式をうまく処理できるかが問われる．幾何考察も必要とするため，全体としては難しい問題であったと考えられる．

1 2 で満点を取り，3 4 でどれだけ点数を伸ばせるかがポイントになる．3 4 については計算を正確に，かつ速く実行できる力が要求された．全体として，複雑性は無いが，計算量が多いという観点から，難易度は例年並みと考えてよく，一次通過ラインは65%と予想される．