医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

日本医科大学(後期)　数学

2019年2月27日実施

1

数列 $\{a_n\}$ は次を満たしている：

$$a_{n+1} = 2a_n + 3n + 4^n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\ a_1 = -6$$

このとき以下の空欄 ア ～ シ に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ.

問 1　数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義するとき，b_{n+1} を b_n と n を用いて表すと

$$b_{n+1} = \boxed{\text{ア}}\,b_n + \boxed{\text{イ}} \cdot \boxed{\text{ウ}}^{\,n} + \boxed{\text{エ}}$$

である.

問 2　数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_n + 3$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義するとき，c_{n+1} を c_n と n を用いて表すと

$$c_{n+1} = \boxed{\text{オ}}\,c_n + \boxed{\text{カ}} \cdot \boxed{\text{キ}}^{\,n}$$

である.

問 3　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表すと

$$a_n = \boxed{\text{ク}} \cdot \boxed{\text{ケ}}^{\,n-1} - \boxed{\text{コ}}^{\,n} - \boxed{\text{サ}}\,n - \boxed{\text{シ}}$$

である.

解答

問 1

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3(n+1) + 4^{n+1} \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3n + 4^n \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② を辺々引くことで

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 3 \cdot 4^n + 3$$

$$\therefore\ \boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n + 3 \cdot 4^n + 3}.$$

問 2

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+1} + 3 \\ &= 2b_n + 3 \cdot 4^n + 3 + 3 \\ &= 2(b_n + 3) + 3 \cdot 4^n \\ &= 2c_n + 3 \cdot 4^n \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{c_{n+1} = 2c_n + 3 \cdot 4^n} \quad \cdots\cdots ③$$

問 3　ここで，③ の両辺を 2^{n+1} で割ることで

$$\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{c_n}{2^n} + 3 \cdot 2^{n-1}$$

よって，$n \geqq 2$ において

$$\frac{c_n}{2^n} = \frac{c_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$$

ここで，$c_1 = b_1 + 3 = a_2 - a_1 + 3 = -5 - (-6) + 3 = 4$ であることから

$$\frac{c_n}{2^n} = 2 + 3 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

$$\therefore \ c_n = 3 \cdot 2^{2n-1} - 2^n \qquad (\text{これは } n = 1 \text{ でも成り立つ})$$

ここで，$c_n = b_n + 3 \Longleftrightarrow b_n = c_n - 3$ より

$$\begin{aligned} b_n &= 3 \cdot 2^{2n-1} - 2^n - 3 \\ &= 6 \cdot 4^{n-1} - 2^n - 3 \end{aligned}$$

さらに，$a_{n+1} - a_n = b_n$ であることから $n \geqq 2$ において，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -6 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(6 \cdot 4^{k-1} - 2^k - 3\right) \\ &= -6 + 6 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} - 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - 3(n-1) \\ &= \boldsymbol{2 \cdot 4^{n-1} - 2^n - 3n - 3} \qquad (\text{これは } n = 1 \text{ でも成り立つ}) \end{aligned}$$

Ⅱ

以下の各問いに答えよ．

問 1　関数 $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を考えることにより，不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}dx$ を求めよ．なお積分定数は省略してよい．

問 2　xy 平面上の双曲線 $x^2-y^2=-1$ $(y>0)$ と直線 $y=x$ および 2 直線 $x=0$, $x=t$（ただし，$t>0$）で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

問 3　k を実数の定数とする．問 2 の $S(t)$ に対して t $(t>0)$ の関数 $S(t)-k\log t$ が $t\to+\infty$ で収束するための，定数 k に対する必要十分条件を求めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

解答

問 1　（以下，積分定数は省略して考えるものとする）

まず，$\{\log(x+\sqrt{x^2+1})\}'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ より

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\log(x+\sqrt{x^2+1})\quad\cdots\cdots①$$

に注意する．

$$I=\int\sqrt{x^2+1}dx$$

とおく．部分積分により

$$\begin{aligned}
I&=\int\sqrt{x^2+1}dx\\
&=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx\\
&=x\sqrt{x^2+1}-\int\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx\\
&=x\sqrt{x^2+1}-\int\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx\\
&=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx\\
&=x\sqrt{x^2+1}-I+\log(x+\sqrt{x^2+1})\qquad(\because①)
\end{aligned}$$

よって

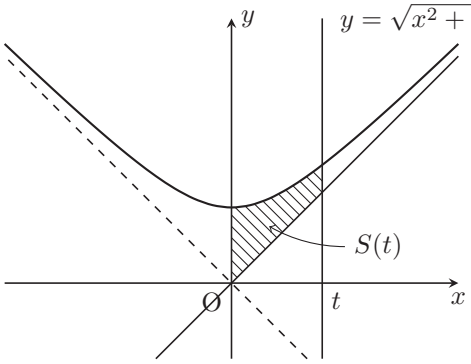
$$2I=x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

すなわち

$$I=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left\{\boldsymbol{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})}\right\}\quad\cdots\cdots②$$

である．

問 2　図の斜線部分の面積が $S(t)$ だから



$$S(t)=\int_0^t(\sqrt{x^2+1}-x)dx$$

である.

② （問 1 の結果）を用いて

$$\begin{aligned}S(t)&=\left[\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\right\}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^t\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{t\sqrt{t^2+1}+\log(t+\sqrt{t^2+1})-t^2\right\}}\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$

問 3　③ （問 2 の結果）から

$$\begin{aligned}S(t)-k\log t&=\frac{1}{2}\left\{t\sqrt{t^2+1}+\log(t+\sqrt{t^2+1})-t^2\right\}-k\log t\\&=\frac{1}{2}\left\{(t\sqrt{t^2+1}-t^2)+\log(t+\sqrt{t^2+1})-\log t^{2k}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{(t\sqrt{t^2+1}-t^2)+\log\left(\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{t^{2k}}\right)\right\}\quad\cdots\cdots④\end{aligned}$$

$A=t\sqrt{t^2+1}-t^2$，$B=\dfrac{t+\sqrt{t^2+1}}{t^{2k}}$ とおく.

以下，A，B に対して，$t\to\infty$ のときを考える.

$$\begin{aligned}A&=t(\sqrt{t^2+1}-t)\\&=t\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}+1}\\&\to\frac{1}{2}\quad(t\to\infty)\quad\cdots\cdots⑤\end{aligned}$$

であり，次に B が収束するかどうかを調べると

$$B=\frac{1}{t^{2k-1}}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)$$

だから

$k>\dfrac{1}{2}$ のとき，$B\to+0$ より $\log B\to-\infty$

$k<\dfrac{1}{2}$ のとき，$B\to\infty$ より $\log B\to\infty$

であり，ともに発散し不適である．つまり，$k=\dfrac{1}{2}$ が必要である．

このとき $B\to 2$ から

$$\log B\to \log 2\ (t\to\infty)\quad \cdots\cdots ⑥$$

と分かる．以上から，$S(t)-k\log t$ が $t\to\infty$ で収束するための必要十分条件は $k=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ である．

実際このとき，④ , ⑤ , ⑥ から

$$\lim_{t\to\infty}\{S(t)-k\log t\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\log 2\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{\log 2}.$$

III

O を原点とする座標空間において 1 点 A$(0,\ 0,\ 4)$ をとり，点 B$(1,\ 1,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面を S とする．S 上の点 P を動かしたときに直線 AP と xy 平面との交点 Q が描く図形を D とする．

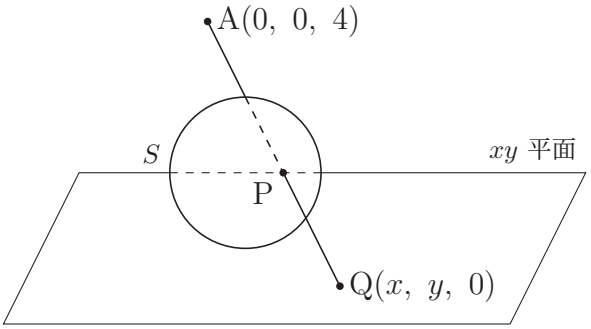
問 1　D 上の点 Q の座標を $(x,\ y,\ 0)$ とするとき，x，y の満たす不等式を求めよ．

問 2　x，y，X，Y を実数，i を虚数単位とし，θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすとする．複素数平面における点 $z = x + iy$ を，原点を中心として θ 回転した点が $Z = X + iY$ となったとき，x，y を X，Y，θ を用いてそれぞれ表せ．答えのみでよい．

問 3　D を xy 平面上で原点を中心として θ 回転（ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$）して得られる図形を表す X，Y の不等式に XY の項が含まれないように，θ の値を定め，D の面積を求めよ．

解答

問 1



点 P は直線 AQ 上にあることから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \\ &= (0,\ 0,\ 4) + t(x,\ y,\ -4) \\ &= (tx,\ ty,\ 4 - 4t)\end{aligned}$$

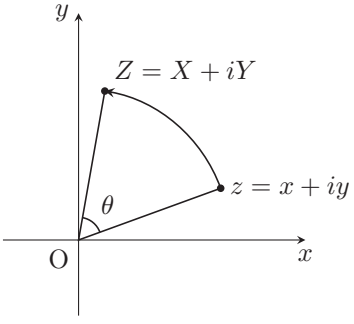
と書ける．さらに，点 P は球面 $S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ 上にあることから

$$\begin{aligned}&(tx-1)^2 + (ty-1)^2 + (3-4t)^2 = 1 \\ \iff &(x^2 + y^2 + 16)t^2 - 2(x + y + 12)t + 10 = 0 \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

をみたす実数 t が存在する．① を t の二次方程式と見て，判別式を D とすると

$$\begin{aligned}&\frac{D}{4} = (x + y + 12)^2 - 10(x^2 + y^2 + 16) \geqq 0 \\ \therefore\ &\boldsymbol{9x^2 + 9y^2 - 2xy - 24x - 24y + 16 \leqq 0} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

問 2



z は Z を原点のまわりに $-\theta$ 回転して得られるので

$$\begin{aligned} x+iy &= (X+iY)(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)) \\ &= (X+iY)(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= (X\cos\theta + Y\sin\theta) + i(-X\sin\theta + Y\cos\theta) \end{aligned}$$

よって，実部と虚部を比較することで

$$x = \boldsymbol{X\cos\theta + Y\sin\theta},\ y = \boldsymbol{-X\sin\theta + Y\cos\theta} \quad \cdots\cdots ③$$

問 3　不等式 ② で表される領域の左辺の式は，x と y を入れ替えても変わらないので，領域 D は $y=x$ に関して対称な 2 次曲線であることがわかる．

よって，領域 D （不等式 ②）を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転すれば，XY の項がない不等式が得られる．

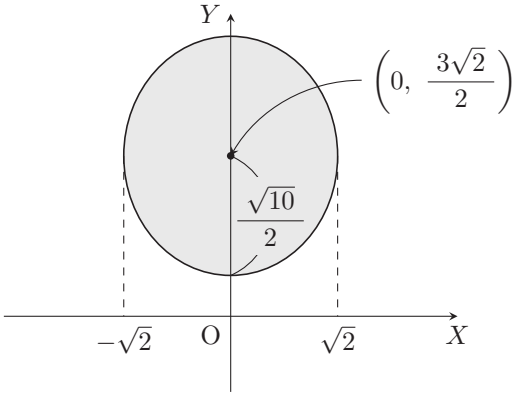
③ に $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ を代入すると

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}X + \dfrac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$$

これを不等式 ② に代入して

$$\begin{aligned} &9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 + 9\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 \\ &\quad -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) \\ &\quad -24\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) - 24\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) + 16 \leqq 0 \\ \therefore\quad &\frac{9}{2}(X^2+2XY+Y^2) + \frac{9}{2}(X^2-2XY+Y^2) - 2\left(\frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}X^2\right) - 24\sqrt{2}Y + 16 \leqq 0 \\ \therefore\quad &10X^2 + 8Y^2 - 24\sqrt{2}Y + 16 \leqq 0 \\ \therefore\quad &\frac{X^2}{2} + \frac{\left(Y-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\dfrac{5}{2}} \leqq 1 \end{aligned}$$

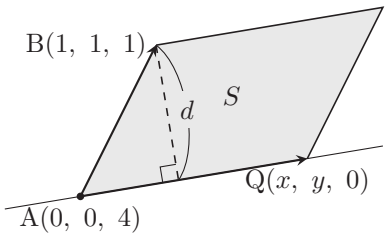
これより，この不等式で表される領域を XY 平面に描くと，次のようになる．



つまり，長半径 $\sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$，短半径 $\sqrt{2}$ の楕円の内部および外周なので，

求める面積は $\pi \times \sqrt{\dfrac{5}{2}} \times \sqrt{2} = \boldsymbol{\sqrt{5}\pi}$.

問 1 の別解



図の平行四辺形の面積 S に注目する．S をベクトルを用いて表せば

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})^2}\quad\cdots\cdots④$$

一方で，点 B と直線 AQ の距離を d とすれば $S=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cdot d\quad\cdots\cdots⑤$

④ , ⑤ より

$$\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})^2}=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cdot d\quad\cdots\cdots⑥$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

これを ⑥ に代入して，

$$\sqrt{(x^2+y^2+16)\cdot(1^2+1^2+(-3)^2)-(x+y+12)^2}=\sqrt{x^2+y^2+16}\cdot d$$

$$\therefore\ \sqrt{11(x^2+y^2+16)-(x+y+12)^2}=\sqrt{x^2+y^2+16}\cdot d$$

$$\therefore\ d=\sqrt{\frac{11(x^2+y^2+16)-(x+y+12)^2}{x^2+y^2+16}}$$

とわかる．

点 Q が存在する範囲は，点 P が S 上に存在する．つまり，

点 B と直線 AQ の距離 d が 1 以下

であればよいから，

$$d\leqq 1\Longleftrightarrow\sqrt{\frac{11(x^2+y^2+16)-(x+y+12)^2}{x^2+y^2+16}}\leqq 1$$

$$\therefore\ \frac{11(x^2+y^2+16)-(x+y++12)^2}{x^2+y^2+16}\leqq 1$$

これを整理して，

$$\boldsymbol{9x^2+9y^2-2xy-24x-24y+16\leqq 0}$$

IV

n を 1 以上の整数とし，p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．白球 n 個，黒球 n 個，合計 $2n$ 個の球が入った袋から球を無作為に取り出す思考を考える．ただし，取り出した球は袋にもどさない．さらに，袋の中の白球は 1 秒経過するごとに確率 p で黒球に変化し，袋の中の黒球と袋から取り出した球は色が変化しないものとする．また，1 以上の整数 N に対し，以下の問題文中で「N 秒後に袋から球を取り出す」とは，袋に $2n$ 個の球を入れてから N 秒後に起こり得る袋の中の球の色の変化が完了した直後に球を取り出すことを意味する．このとき，以下の各問いに答えよ．

問 1　1 秒後，2 秒後に袋から球を 1 個ずつ取り出したとき，取り出した 2 個の球がどちらも白球である確率を求めよ．

問 2　1 秒後，2 秒後，$\cdots$，n 秒後に袋から球を 1 個ずつ取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて白球である確率を $P(n)$ とする．一方，別の試行として，色の変化が起こらないものとして，$2n$ 個の球が入った袋から n 個の球を取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて白球である確率を $Q(n)$ とする．このとき，以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$$

問 3　n 秒後に袋から n 個の球を取り出したとき，取り出した n 個の球がすべて黒球である確率を $R(n)$ とする．このとき，以下の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-R(n)}{n(1-p)^n}$$

ただし，必要ならば $0 < a < 1$ に対して $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

解答

問 1　1 秒後に取り出された白球と，2 秒後に取り出された白球の選び方は ${}_n\mathrm{P}_2$ 通り．

それぞれの白球が 1 秒後，または 2 秒後に白球のままである確率は，$1-p$，$(1-p)^2$ である．したがって，

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_2 \cdot (1-p)\cdot(1-p)^2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{2(2n-1)}}\boldsymbol{(1-p)^3}$$

問 2　条件を満たすとき，n 個の白球は取り出されるまで，どれも黒球に変化しない．

したがって，

$$P(n) = Q(n)\cdot(1-p)^1\cdot(1-p)^2\cdot(1-p)^3\cdot\cdots\cdot(1-p)^n$$

$$\log\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right) = 1\cdot\log(1-p) + 2\cdot\log(1-p) + 3\cdot\log(1-p) + \cdots + n\cdot\log(1-p)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\log(1-p)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log(1-p)}$$

問 3　まず補題を 2 つ用意しておこう．

補題 1

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}$$

上式は

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

$$= ({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n)({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n)$$

として x^n の係数に注目すると理解できる．

補題 2

$$ {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \cdot {}_{n}\mathrm{C}_{n-k} $$

上式は

$$ \begin{aligned} (1+x)^{2n-1} &= (1+x)^{n-1} \cdot (1+x)^n \\ &= ({}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 x + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_n x^{n-1})({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n) \end{aligned} $$

として x^{n-1} の係数に注目すると理解できる．

解答

以下，取り出した時点で黒球であったとしても袋の中で最初白球であった場合，その球を「元白」と呼ぶことにする．白球が白球のままであっても「元白」と呼ぶ．「元黒」も同様．

$2n$ 個の球から「元白」を k 個，「元黒」を $n-k$ 個選ぶ確率は $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ である．

$R(n)$ のためには「元白」はすべて黒になっていないといけないので $R(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \{1-(1-p)^n\}^k$

であることが分かる．したがって

$$ \begin{aligned} 1 - R(n) &= 1 - \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k} \{1-(1-p)^n\}^k \\ &= \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k} [1 - \{1-(1-p)^n\}^k] \qquad \text{(補題 1 より)} \\ &= \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k} [1 - \{1-(1-p)^n\}^k] \quad \cdots\cdots ① \end{aligned} $$

ここで，$0 < x < 1$ において $1 - kx \leqq (1-x)^k \leqq 1 - kx + \dfrac{k(k-1)}{2}x^2$（$k$ は自然数）が成り立つことから

$$ \begin{aligned} & 1 - k(1-p)^n \leqq \{1-(1-p)^n\}^k \leqq 1 - k(1-p)^n + \frac{k(k-1)}{2}(1-p)^{2n} \\ \iff & k(1-p)^n - \frac{k(k-1)}{2}(1-p)^{2n} \leqq 1 - \{1-(1-p)^n\}^k \leqq k(1-p)^n \end{aligned} $$

これと ① により $A(n) - B(n) \leqq \dfrac{1-R(n)}{n(1-p)^n} \leqq A(n)$ が成り立つ．

$$ \left(A(n) = \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k},\ B(n) = \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k} \frac{k(k-1)}{2n}(1-p)^n \text{ とした} \right) $$

ここから $\lim_{n\to\infty} A(n)$ と $\lim_{n\to\infty} B(n)$ を求めればよいことになる．

$A(n)$ について $\dfrac{k}{n} {}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ および補題 2 により

$$ A(n) = \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \cdot {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{1}{2} (\text{定数}) $$

がわかる．次に

$$ 0 < B(n) < \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k} \frac{n^2}{2n}(1-p)^n $$

が成り立ち,

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}\frac{n^2}{2n}(1-p)^n\\ &= \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}\right)\times\frac{n^2}{2n}(1-p)^n\\ &= \frac{1}{2}n(1-p)^n\end{aligned}$$

さらに $\lim_{n\to\infty} n(1-p)^n = 0$ より $\lim_{n\to\infty} B(n) = 0$ がわかる.

以上により $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-R(n)}{n(1-p)^n} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$.

蛇足

近似の感覚があれば

$$\begin{aligned}R(n) &= \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}(1-X)^k && (X=(1-p)^n \ll 0 \text{ とみなす})\\ &\fallingdotseq \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}(1-kX)\\ &= \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k} - \frac{n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}X\\ &= 1-\frac{n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}X\\ &= 1-\frac{1}{2}n(1-p)^n\end{aligned}$$

というのが発想として自然なのでしょう.

別解

問 3

確率 $1-R(n)$ はもちろん取り出した n 個の球の中に少なくとも一つの白球が含まれる確率である．袋の中の n 個の白球に「元白 1」〜「元白 n」と名前を付ける．取り出した n 個の球の中に「元白 k」$(1\leqq k\leqq n)$ が白球として含まれる事象を X_k とすると

$$1-R(n) = P(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n)$$

ということになる．ところで X_1 とは「元白 1」が選ばれて，それが白のまま残る（他の球はどうでもよい）確率だから $P(X_1)=\dfrac{1}{2}(1-p)^n$ である．他も同様で $P(X_k)=\dfrac{1}{2}(1-p)^n$ だから

$$\begin{aligned}1-R(n) &= P(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n)\\ &\leqq P(X_1)+P(X_2)+\cdots+P(X_n)\\ &= \frac{n}{2}(1-p)^n\end{aligned}$$

であることが分かった.

次に $1-R(n)$ を下から評価したい．取り出した n 個の球の中で「元白 k」$(1\leqq k\leqq n)$ だけが白球として含まれる事象を Y_k とする．$Y_k\subset X_k$ である．また $Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n$ は排反である．Y_1 を評価しよう.

「元白 1」は必ず選ばれてしかも白のまま残らないといけない．その確率は $\dfrac{1}{2}(1-p)^n$ である.

残り $n-1$ 個は「元白 1」以外の $2n-1$ 個から選ぶ．$n-1$ 個の「元白」と n 個の「元黒」から $n-1$ 個の球を選んだとき，「元白」が k $(1 \leqq k \leqq n)$ 個になっている確率を q_k とする．$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q_k = 1$ である．Y_k であるためには，選んだ「元白」は黒に変わっていないといけないので，

$$\begin{aligned} P(Y_1) &= \frac{1}{2}(1-p)^n \times \sum_{k=0}^{n-1} q_k \{1-(1-p)^n\}^k \\ &\geqq \frac{1}{2}(1-p)^n \times \sum_{k=0}^{n-1} q_k \{1-(1-p)^n\}^n \\ &\geqq \frac{1}{2}(1-p)^n \times \{1-(1-p)^n\}^{n-1} \end{aligned}$$

である．従って

$$\begin{aligned} 1-R(n) &= P(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) \\ &\geqq P(Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n) \\ &\geqq P(Y_1) + P(Y_2) + \cdots + P(Y_n) \\ &= \frac{n}{2}(1-p)^n \times \{1-(1-p)^n\}^{n-1} \end{aligned}$$

以上により

$$\frac{1}{2} \times \{1-(1-p)^n\}^{n-1} \leqq \frac{1-R(n)}{n(1-p)^n} \leqq \frac{1}{2}$$

が得られた．さらに $n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \log\{1-(1-p)^n\}^{n-1} &= (n-1)\log\{1-(1-p)^n\} \\ &= -(n-1)(1-p)^n \frac{\log\{1-(1-p)^n\}}{-(1-p)^n} \\ &\to 0 \\ &\left(\because \quad (n-1)(1-p)^n \to 0,\ \frac{\log\{1-(1-p)^n\}}{-(1-p)^n} \to 1 \right) \end{aligned}$$

であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \{1-(1-p)^n\}^{n-1} = 1$ である，従って，ハサミウチの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1-R(n)}{n(1-p)^n} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ が示された．

講評

［Ⅰ］［Ⅱ］［Ⅲ］はいずれも日本医科大学を受験するクラスになると典型的で経験がある問題ばかり．YMS のテキストにほぼ同じ設定の問題がある．ここを最少失点で切り抜けたい．

［Ⅳ］は読み取りが非常に難しい問題であるが，読み取れれば (1)(2) は取れるだろうか．(3) は時間内に解くには厳しすぎる内容だった．

前期合格者の層は，昨年までと比較して，レベルが上がっている印象を受ける．後期の倍率も考えると 75% をきっちり取りたい問題である．他の科目次第では 60% 程度までは許容か．

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ ☎ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 ☎ 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録 ▶
LINE 登録 ▶