$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

複素数平面上で，複素数 z の表す点が原点を中心とする半径 1 の円周上を動く．このとき，次の問いに答えよ．ただし i は虚数単位とする．

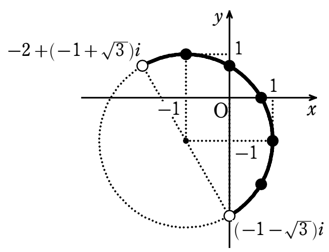
(1) 方程式 $z^{12}=1$ を満たす z の値をすべて求めよ．

(2) 単位円の円周上を動き，虚部を正とする複素数αに対し，$w=(1-\sqrt{3}\,i)\alpha-(1+i)$ で表される点の軌跡を複素数平面上に図示せよ．

(3) (2)で求めた軌跡上の点のうち，$\left(\dfrac{w+1+i}{2}\right)^{12}=1$ を満たすものをすべて答えよ．また，それらの点を (2) で描いた図中に示せ．

解答 (1) $z=\pm1,\ \pm i,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{2},\ \pm\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \pm\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$

(2)



(3) $1-i,\ \sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}-1-2i,\ (\sqrt{3}-1)i,\ -1+i$

ただし，(3) の解答は (2) の図中に「　」として示した．

【解説】

(1) z は単位円上を動くから，$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおく．

$z^{12}=1$ に代入して，$\cos12\theta+i\sin12\theta=1$

$0\leqq12\theta<24\pi$ より，$12\theta=2n\pi\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 11)$

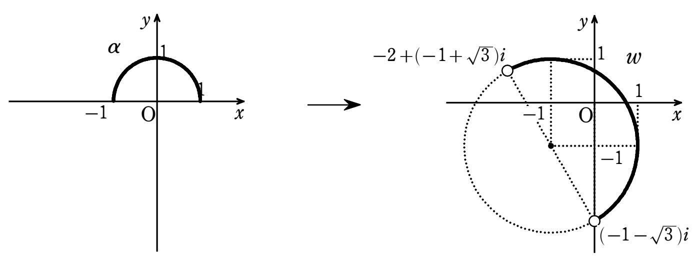
したがって $\theta=\dfrac{n\pi}{6}$ となり，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 11$ の各値に対して z を求めると，

$$z=\pm1,\ \pm i,\ \pm\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}-i}{2},\ \pm\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \pm\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

(2) α が満たす条件は，$|\alpha|=1$，$0<\arg\alpha<\pi$ としてよい．

$$w=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha-1-i \quad \cdots①$$

であるから，原点を中心として α を $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動して 2 倍に相似拡大し，さらにその後 $-1-i$ だけ平行移動して得られる複素数が w である．



(3) ① より，$\dfrac{w+1+i}{2}=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$

これを (3) の条件に代入して，

$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{12}\alpha^{12}=1 \iff \alpha^{12}=1$$

$0<\arg\alpha<\pi$ より，α は (1) で求めた z のうち $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ に対応する値である．

したがって，$\alpha=\cos\dfrac{n\pi}{6}+i\sin\dfrac{n\pi}{6}$ を ① に代入して，

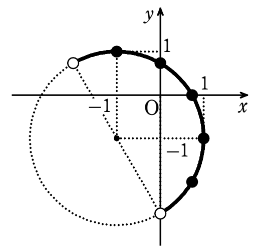
$$w=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)-1-i$$

$$=2\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{6}+i\sin\frac{(n-2)\pi}{6}\right)-1-i$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の各値に対して w を求めると，

$$w=\sqrt{3}-1-2i,\ 1-i,\ \sqrt{3}-1,\ (\sqrt{3}-1)i,\ -1+i$$

これを図中に「●」として示すと次のようになる．



2 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみ解答欄に記入せよ．

(1) 次のような数列

$$\frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{8}{7},\ \frac{10}{7},\ \frac{12}{7},\ \frac{2}{9},\ \cdots$$

を考える．このとき，分母の値が等しいものを一つの群とする．$n \geqq 2$ のとき，n 群に含まれる数列の項数を a_n とすると，a_n は等差数列をなす．

(1−1) 第 n 群の末項は初項から数えて何項目か．

(1−2) 初項から第 31 群の最後の項までの総和を求めよ．

(1−3) 初項からの和が最初に 2019 を超えるのは第何群の何項目か．

(2) 座標空間において，点 $A(0,\ 1,\ 2)$，$B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 4\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 4,\ \frac{1}{2}\right)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(2−1) 点 P が zx 平面上を動くとき，AP＋PB の最小値を求めよ．また，直線 AP の方程式を求めよ．

(2−2) 点 Q が y 軸上を，また点 R が z 軸上を動くとき，AQ＋QC＋AR＋RB の最小値を求めよ．また，直線 QR の方程式を求めよ．

解答 (1) (1−1) n^2-n+1 (1−2) 932 (1−3) 第 46 群の 58 項目

(2) (2−1) 最小値：$\sqrt{6+\sqrt{2}}$

直線の方程式： $x=(\sqrt{2}-1)(1-y)=\dfrac{z-2}{2\sqrt{2}}$

または $(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 2)+t(1,\ -1-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

(2−2) 最小値：$5\sqrt{2}$， QR の方程式： $y+z=3,\ x=0$

【解説】(1)

(1−1) $n \geqq 2$ のとき $1+\sum_{k=2}^{n} 2(k-1)=n^2-n+1$ （$n=1$ のときも成り立つ）

(1−2) 第 n 群に含まれる項の和 T_n は，$n \geqq 2$ のとき

$$T_n=\frac{2}{2n-1}+\frac{4}{2n-1}+\cdots+\frac{4(n-1)}{2n-1}=\sum_{k=1}^{2(n-1)}\frac{2k}{2n-1}=2(n-1)$$

したがって，第 31 群の最後の項までの総和は，

$$\frac{2}{1}+\sum_{k=2}^{31}2(k-1)=932$$

(1−3) 第 n 群の最後の項までの総和 A_n は，$n \geqq 2$ のとき

$$A_n=\frac{2}{1}+\sum_{k=2}^{n}2(k-1)=n^2-n+2$$

したがって，

$$A_{n-1}<2019 \leqq A_n$$

を満たす整数 n を考えると，

$$A_{45}=1982,\quad A_{46}=2072$$

であるから，$n=46$．すなわち，求める項は第 46 群に属する．さらに，第 46 群の最初の項から順に足して和が $2019-1982=37$ を超える時を考えればよい．すなわち，

$$\frac{2}{91}+\frac{4}{91}+\frac{6}{91}+\cdots+\frac{2k}{91}>37 \iff k(k+1)>3367$$

を満たす最小の整数 k を求めればよい．

$$57\times58=3306,\quad 58\times59=3422$$

より，最小の整数 k は 58 である．したがって，求める項は第 46 群の 58 項目．

(2)

(2−1) 2 点 $A(0,\ 1,\ 2)$，$B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 4\right)$ は，zx 平面に関して同じ側 ($y>0$) にある．

ここで，zx 平面に関して点 B と対称な点を B′とおくと $B'\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 4\right)$．

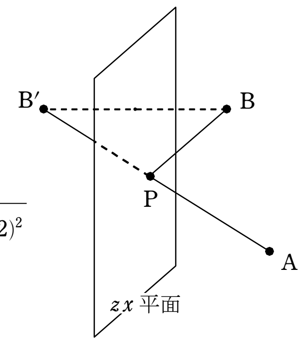
このとき，$L=AP+PB$ とおくと，

$PB=PB'$

であるから，

$L=AP+PB' \geqq AB'$

したがって，3 点 A，P，B′がこの順に同一直線上に並ぶとき，L は最小となる．最小値は



$$AB'=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)^2+(4-2)^2}=\sqrt{6+\sqrt{2}}$$

このとき，直線 AP の方程式は，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{OA}+\sqrt{2}\,t\,\overrightarrow{AB'}=(0,\ 1,\ 2)+t(1,\ -1-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$$

t を消去することにより，

$$x=(\sqrt{2}-1)(1-y)=\frac{z-2}{2\sqrt{2}}$$

(2−2) 点 C から y 軸におろした垂線の足を H，点 B から z 軸におろした垂線の足を I とおくと，$H(0,\ 4,\ 0)$，$I(0,\ 0,\ 4)$ である．

点 C を点 H を中心として y 軸まわりに回転し，点 A と点 Q がある yz 平面上の点 C′ にうつす．ただし，y 軸に関して点 A と反対側に置くことにする．CH＝1 であるから，

$C'(0,\ 4,\ -1)$

点 B を点 I を中心として z 軸まわりに回転し，点 A と点 R がある yz 平面上の点 B″ にうつす．ただし，z 軸に関して点 A と反対側に置くことにする．BI＝1 であるから，

$B''(0,\ -1,\ 4)$

fig.1

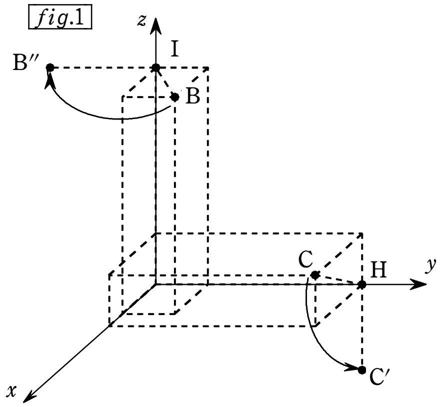
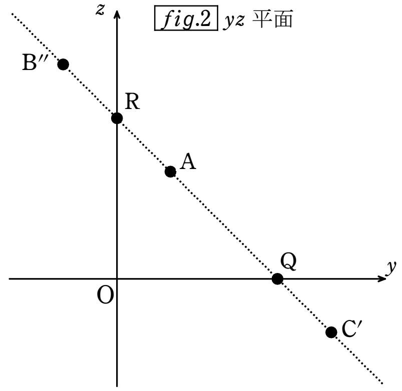


fig.2 yz 平面



ここで，$L'=AQ+QC+AR+RB$ とおくと，$QC=QC'$，$RB=RB''$ であるから，

$$L'=AQ+QC'+AR+RB'' \geqq AC'+AB''$$

3 点 A，Q，C′ がこの順に同一直線上に並び，3 点 A，R，B″ がこの順に同一直線上に並ぶとき，等号が成立し L' は最小値をとる．このとき，*fig.2* のように 5 点が直線 $z=-y+3$ 上に並ぶので，L' の最小値は $B''C'=5\sqrt{2}$．

直線 QR の方程式は $y+z=3,\ x=0$ である．

3 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $\log_2 5<\dfrac{n}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(2) ある円に内接する正六角形の面積を S_1，外接する正六角形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ．

(3) 下のデータの中央値を求めよ．

14, 29, 54, 11, 63, 53, 4, 78, 25, 9

(4) 1 から 6 までの数字が記入された球が 1 球ずつある．これらの球を袋の中に入れ，3 つの球を無作為に取り出すとき，その中の最小の数字を X とする．

(4−1) X＝2 となる確率を求めよ．

(4−2) X の期待値（平均値）を求めよ．

解答 (1) 7 (2) $\dfrac{3}{4}$ (3) 27 (4) (4−1) $\dfrac{3}{10}$ (4−2) $\dfrac{7}{4}$

【解説】

(1) $\log_2 5<\dfrac{n}{3}$ より，$n>3\log_2 5=\log_2 125$

$\log_2 125>\log_2 64=6$，　$\log_2 125<\log_2 128=7$

であるから，条件を満たす最小の自然数 n は $n=7$

(2) 円の中心を O，半径を r とする．

また，この円に内接する正六角形の隣り合う頂点を A，B とし，外接する正六角形の隣り合う頂点を C，D とする．

このとき，$OA=OB=r$，$OC=OD=\dfrac{2}{\sqrt{3}}r$ であるから，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\triangle OAB}{\triangle OCD}=\frac{\frac{1}{2}r^2\sin60^\circ}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}r\right)^2\sin60^\circ}=\frac{3}{4}$$

(3) 与えられたデータを小さい順に並べると，

4, 9, 11, 14, 25, 29, 53, 54, 63, 78

したがって，その中央値は $\dfrac{25+29}{2}=27$

(4) 3 つの球の取り出し方は，全部で ${}_6C_3=20$（通り）

このうち，$X=k$（$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$）となる取り出し方は，k が記入された球を選び，$k+1$ から 6 までが記入された球のうち 2 つを選ぶ場合である．

したがって，その確率は，

$$\frac{{}_{6-k}C_2}{20}=\frac{(6-k)(5-k)}{40}\quad\cdots①$$

(4−1) ① で $k=2$ として，$X=2$ となる確率は $\dfrac{3}{10}$

(4−2) X の期待値は，

$$\sum_{k=1}^{4}k\cdot\frac{(6-k)(5-k)}{40}=\frac{20}{40}+\frac{24}{40}+\frac{18}{40}+\frac{8}{40}=\frac{7}{4}$$

4 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) 曲線 $y=x(x-a)(2x-a)$ と直線 $y=-x+t$ が $0\leqq t\leqq a$ であるようなすべての t に対して相異なる3点で交わるような a の値の範囲を求めよ．

(2)
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$$
を求めよ．

(3) $f'(2)=3$ を満たす2次関数 $f(x)$ について
$$\int_{2-\pi}^{2+\pi} f(x)\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$
の値を求めよ．

解答 (1) $a>2\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$ (3) 24

【解説】

(1) $a\geqq 0$ として考える．

（i） $a=0$ のとき，

曲線 $y=2x^3$ と直線 $y=-x$ は相異なる3点で交わらないから不適．

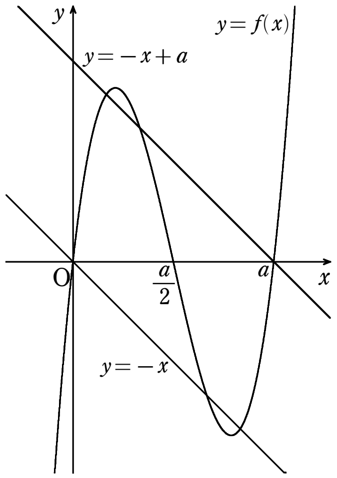
（ii） $a>0$ のとき，

$f(x)=x(x-a)(2x-a)$ とおくと，

$$f\left(\frac{a}{2}+t\right)+f\left(\frac{a}{2}-t\right)=\left(\frac{a}{2}+t\right)\left(-\frac{a}{2}+t\right)\cdot 2t+\left(\frac{a}{2}-t\right)\left(-\frac{a}{2}-t\right)\cdot(-2t)$$
$$=2t\left(t^2-\frac{a^2}{4}\right)-2t\left(t^2-\frac{a^2}{4}\right)=0$$

であるから，曲線 $y=f(x)$ は点 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ に関して対称である．

また，x 軸との交点は $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$，$(a,\ 0)$ である．



したがって，直線 $y=-x+a$ が図のように曲線 $y=f(x)$ と相異なる3点で交われば，直線 $y=-x$ とも相異なる3点で交わり，直線 $y=-x+t\ (0\leqq t\leqq a)$ と常に相異なる3点で交わるようになる．

$y=x(x-a)(2x-a)$ と $y=-x+a$ を連立して，

$$x(x-a)(2x-a)=-(x-a) \quad \cdots①$$

方程式①が $x=a$ 以外に異なる2解を持てばよい．

①の $x=a$ 以外の解が満たす方程式は，

$$x(2x-a)=-1$$
$$\iff 2x^2-ax+1=0 \quad \cdots②$$

②で $x=a$ とすると $a^2+1=0$ となり矛盾するから，②は $x=a$ を解に持たない．

したがって，②が異なる2つの実数解を持つ条件を考えて，

$$(-a)^2-4\cdot2\cdot1>0 \iff a^2>8$$

$a>0$ より，$a>2\sqrt{2}$

（i），（ii）より，$a>2\sqrt{2}$

【注意】

上記の解答では $a\geqq 0$ として考えたが，問題文中で a の範囲を制限する文言がないため，本来は $a<0$ の場合も考えるべきである．

この問題は，次の命題が真となるような a の範囲を求める問題である．

$0\leqq t\leqq a \implies$ 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-x+t$ が相異なる3点で交わる

もし $a<0$ であれば，この命題の仮定である $0\leqq t\leqq a$ を満たす t が空集合となり，命題は真となる．

したがって，この問題を厳密に解釈した場合の解答は，$a<0$，$2\sqrt{2}<a$ である．

(2) $(与式)=\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{1+(x-1)^2}$ より，$x-1=\tan t$ と置換すると，$dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$

$$(与式)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}$$

(3) $g(x)=f(x+2)$ とおくと，$g'(x)=f'(x+2)$ より $g'(0)=f'(2)=3 \quad \cdots①$

このとき，$g(x)$ も2次関数であるから，$g(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，

$$g'(x)=2ax+b$$

①より $b=3$ となり，$g(x)=ax^2+3x+c$

次に，与えられた定積分において $x=t+2$ と置換すると，

$$(与式)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t+2)\sin\frac{t}{2}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\frac{t}{2}\,dt$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(at^2\sin\frac{t}{2}+3t\sin\frac{t}{2}+c\sin\frac{t}{2}\right)dt \quad \cdots②$$

$\sin\dfrac{t}{2}$，$t^2\sin\dfrac{t}{2}$ は奇関数，$t\sin\dfrac{t}{2}$ は偶関数であるから，

$$②=2\int_0^{\pi}3t\sin\frac{t}{2}\,dt=6\left[4\sin\frac{t}{2}-2t\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=24$$