医学部専門予備校 YMS
医学部進学予備校 メビオ　医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

昭和大学医学部（Ⅱ期）　数学

2019年3月2日実施

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

複素数平面上で，複素数 z の表す点が原点を中心とする半径 1 の円周上を動く．このとき，次の問いに答えよ．ただし i は虚数単位とする．

(1)　方程式 $z^{12}=1$ を満たす z の値をすべて求めよ．

(2)　単位円の円周上を動き，虚部を正とする複素数 α に対し，$w=(1-\sqrt{3}i)\alpha-(1+i)$ で表される点の軌跡を複素数平面上に図示せよ．

(3)　(2) で求めた軌跡上の点のうち，$\left(\dfrac{w+1+i}{2}\right)^{12}=1$ を満たすものをすべて答えよ．また，それらの点を (2) で描いた図中に示せ．

解答

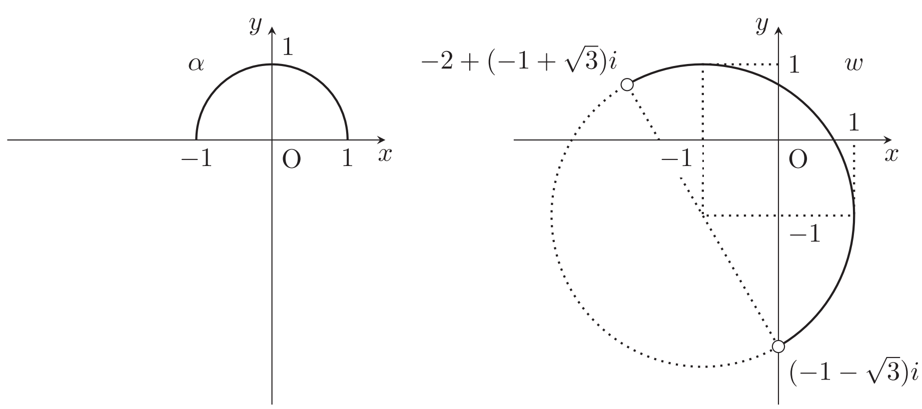
(1)　z は単位円上を動くから，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおく．
$z^{12}=1$ に代入して，$\cos 12\theta+i\sin 12\theta=1$ を得る．$0\leqq 12\theta<24\pi$ より，$12\theta=2n\pi$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 11)$．
したがって $\theta=\dfrac{n\pi}{6}$ となり，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 11$ の各値に対して z を求めると，

$$z=\pm1,\ \pm i,\ \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}-i}{2},\ \pm\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \pm\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

(2)　α が満たす条件は，$|\alpha|=1$，$0<\arg\alpha<\pi$ としてよい．

$$w=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha-1-i\quad\cdots①$$

であるから，原点を中心として α を $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動して 2 倍に相似拡大し，さらにその後 $-1-i$ だけ平行移動して得られる複素数が w である．



(3)　① より，$\dfrac{w+1+i}{2}=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$
これを (3) の条件に代入して，

$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{12}\alpha^{12}\iff\alpha^{12}=1$$

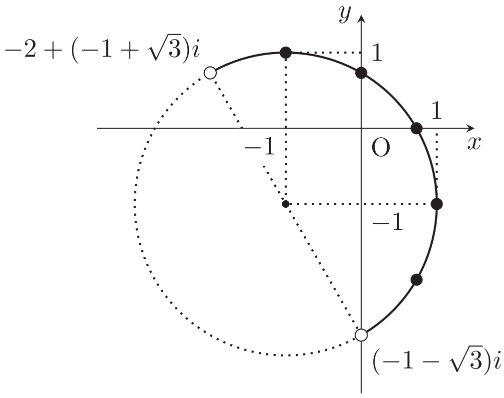
$0 < \arg\alpha < \pi$ より，α は (1) で求めた z のうち $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ に対応する値である．したがって，$\alpha = \cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}$ を ① に代入して，

$$\begin{aligned} w &= 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right) - 1 - i \\ &= 2\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{6} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{6}\right) - 1 - i \end{aligned}$$

$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の各値に対して w を求めると，

$$w = \sqrt{3} - 1 - 2i,\ 1 - i,\ \sqrt{3} - 1,\ (\sqrt{3} - 1)i,\ -1 + i$$

これを図中に「●」として示すと次のようになる．



$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1)　次のような数列

$$\frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{2}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{8}{7},\ \frac{10}{7},\ \frac{12}{7},\ \frac{2}{9},\ \cdots$$

を考える．このとき，分母の値が等しいものを一つの群とする．$n \geqq 2$ のとき，n 群に含まれる数列の項数を a_n とすると，a_n は等差数列をなす．

(1-1)　第 n 群の末項は初項から数えて何項目か．

(1-2)　初項から第 31 群の最後の項までの総和を求めよ．

(1-3)　初項からの和が最初に 2019 を超えるのは第何群の何項目か．

(2)　座標空間において，点 A$(0,\ 1,\ 2)$，B$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 4\right)$，C$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 4,\ \frac{1}{2}\right)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(2-1)　点 P が zx 平面上を動くとき，AP + PB の最小値を求めよ．また，直線 AP の方程式を求めよ．

(2-2)　点 Q が y 軸上を，また点 R が z 軸上を動くとき，AQ + QC + AR + RB の最小値を求めよ．また，直線 QR の方程式を求めよ．

解答

(1)

(1-1)　$n \geqq 2$ のとき $1 + \sum_{k=2}^{n} 2(k-1) = \boldsymbol{n^2 - n + 1}$（$n = 1$ のときも成り立つ）

(1-2)　第 n 群に含まれる項の和 T_n は，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2}{2n-1} + \frac{4}{2n-1} + \cdots + \frac{4(n-1)}{2n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{2(n-1)} \frac{2k}{2n-1} \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$

したがって，第 31 群の最後の項までの総和は，

$$\frac{2}{1} + \sum_{k=2}^{31} 2(k-1) = \mathbf{932}$$

(1-3)　第 n 群の最後の項までの総和 A_n は，$n \geqq 2$ のとき

$$A_n = \frac{2}{1} + \sum_{k=2}^{n} 2(k-1) = n^2 - n + 2$$

したがって，

$$A_{n-1} < 2019 \leqq A_n$$

を満たす整数 n を考えると，$A_{45} = 1982$，$A_{46} = 2072$ であるから，$n = 46$．すなわち，求める項は第 46 群に属する．さらに，第 46 群の最初の項から順に足して和が $2019 - 1982 = 37$ を超える時を考えればよい．すなわち，

$$\frac{2}{91} + \frac{4}{91} + \frac{6}{91} + \cdots + \frac{2k}{91} > 37 \Longleftrightarrow k(k+1) > 3367$$

を満たす最小の整数 k を求めればよい．

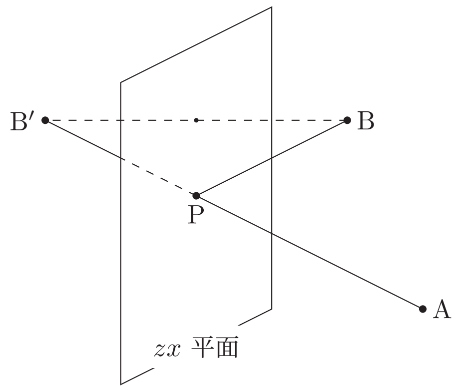
$$57 \times 58 = 3306,\ 58 \times 59 = 3422$$

より，最小の整数 k は 58 である．したがって，求める項は第 46 群の 58 項目．

(2)

(2-1)　2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 4\right)$ は zx 平面に関して同じ側 $(y > 0)$ にある．

ここで，zx 平面に関して点 B と対称な点を B' とおくと $\mathrm{B}'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 4\right)$.



このとき，$L = \mathrm{AP} + \mathrm{PB}$ とおくと，$\mathrm{PB} = \mathrm{PB}'$ であるから，

$$L = \mathrm{AP} + \mathrm{PB}' \geqq \mathrm{AB}'$$

したがって，3 点 A，P，B' がこの順に同一直線上に並ぶとき，L は最小となる．最小値は

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}' &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + (4-2)^2} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{6 + \sqrt{2}}}\end{aligned}$$

このとき，直線 AP の方程式は，

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sqrt{2}t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (0,\ 1,\ 2) + t(1,\ -1-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})\end{aligned}$$

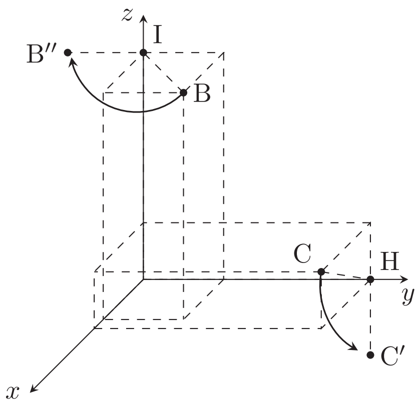
t を消去することにより，

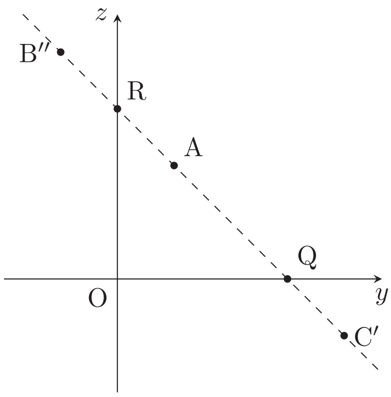
$$\boldsymbol{x = (\sqrt{2} - 1)(1 - y) = \frac{z - 2}{2\sqrt{2}}}$$

(2-2)　点 C から y 軸におろした垂線の足を H，点 B から z 軸におろした垂線の足を I とおくと，$\mathrm{H}(0,\ 4,\ 0)$，$\mathrm{I}(0,\ 0,\ 4)$ である．

点 C を点 H を中心として y 軸まわりに回転し，点 A と点 Q がある yz 平面上の点 C' にうつす．ただし，y 軸に関して点 A と反対側に置くことにする．$\mathrm{CH} = 1$ であるから，$\mathrm{C}'(0,\ 4,\ -1)$.

点 B を点 I を中心として z 軸まわりに回転し，点 A と点 R がある yz 平面上の点 B'' にうつす．ただし，z 軸に関して点 A と反対側に置くことにする．$\mathrm{BI} = 1$ であるから，$\mathrm{B}''(0,\ -1,\ 4)$.





ここで，$L' = \mathrm{AQ} + \mathrm{QC} + \mathrm{AR} + \mathrm{RB}$ とおくと，$\mathrm{QC} = \mathrm{QC'}$，$\mathrm{RB} = \mathrm{RB''}$ であるから，

$$L' = \mathrm{AQ} + \mathrm{QC'} + \mathrm{AR} + \mathrm{RB''} \geqq \mathrm{AC'} + \mathrm{AB''}$$

3 点 A，Q，C$'$ がこの順に同一直線上に並び，3 点 A，R，B$''$ がこの順に同一直線上に並ぶとき，等号が成立し L' は最小値をとる．このとき，右上図のように 5 点が直線 $z = -y + 3$ 上に並ぶので，L' の最小値は $\mathrm{B''C'} = \boldsymbol{5\sqrt{2}}$.

直線 QR の方程式は $\boldsymbol{y + z = 3,\ x = 0}$ である．

$\boxed{3}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) $\log_2 5 < \dfrac{n}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(2) ある円に内接する正六角形の面積を S_1，外接する正六角形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ．

(3) 下のデータの中央値を求めよ．

$$14,\ 29,\ 54,\ 11,\ 63,\ 53,\ 4,\ 78,\ 25,\ 9$$

(4) 1 から 6 までの数字が記入された球が 1 球ずつある．これらの球を袋の中に入れ，3 つの球を無作為に取り出すとき，その中の最小の数字を X とする．

(4-1) $X = 2$ となる確率を求めよ．

(4-2) X の期待値（平均値）を求めよ．

解答

(1) $\log_2 5 < \dfrac{n}{3}$ より，$n > 3\log_2 5 = \log_2 125$

$$\log_2 125 > \log_2 64 = 6,\ \log_2 125 < \log_2 128 = 7$$

であるから，条件を満たす最小の自然数 n は $n = \mathbf{7}$.

(2) 円の中心を O，半径を r とする．

また，この円に内接する正六角形の隣り合う頂点を A，B とし，外接する正六角形の隣り合う頂点を C，D とする．

このとき，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = r$，$\mathrm{OC} = \mathrm{OD} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}r$ であるから

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCD}} = \frac{\frac{1}{2}r^2\sin 60^\circ}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}r\right)^2\sin 60^\circ} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

(3) 与えられたデータを小さい順に並べると，

$$4,\ 9,\ 11,\ 14,\ 25,\ 29,\ 53,\ 54,\ 63,\ 78$$

したがって，その中央値は $\dfrac{25+29}{2} = \mathbf{27}$ である．

(4) 3 つの球の取り出し方は，全部で ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り．

このうち，$X = k$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ となる取り出し方は，k が記入された球を選び，$k+1$ から 6 までが記入された球のうち 2 つを選ぶ場合である．

したがって，その確率は，

$$\frac{{}_{6-k}\mathrm{C}_2}{20} = \frac{(6-k)(5-k)}{40} \quad \cdots ①$$

(4-1) ① で $k = 2$ として，$X = 2$ となる確率は $\mathbf{\dfrac{3}{10}}$.

(4-2) X の期待値は，

$$\sum_{k=1}^{4} k \cdot \frac{(6-k)(5-k)}{40} = \frac{20}{40} + \frac{24}{40} + \frac{18}{40} + \frac{8}{40} = \mathbf{\frac{7}{4}}.$$

$\boxed{4}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1)　曲線 $y=x(x-a)(2x-a)$ と直線 $y=-x+t$ が $0 \leqq t \leqq a$ であるようなすべての t に対して相異なる 3 点で交わるような a の値の範囲を求めよ．

(2)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

を求めよ．

(3)　$f'(2)=3$ を満たす 2 次関数 $f(x)$ について

$$\int_{2-\pi}^{2+\pi} f(x)\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

の値を求めよ．

解答

(1)　$a \geqq 0$ として考える．

(i)　$a=0$ のとき

曲線 $y=2x^3$ と直線 $y=-x$ は相異なる 3 点で交わらないから不適．

(ii)　$a>0$ のとき

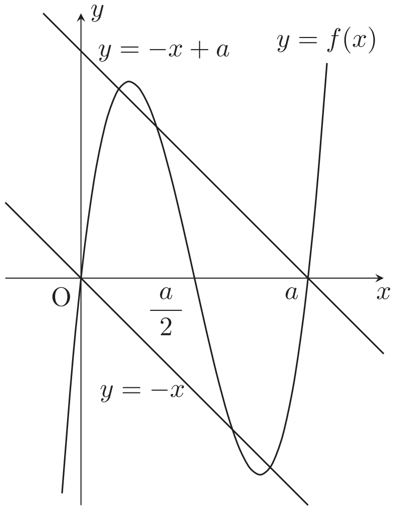
$f(x)=x(x-a)(2x-a)$ とおくと，

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a}{2}+t\right)+f\left(\frac{a}{2}-t\right)&=\left(\frac{a}{2}+t\right)\left(-\frac{a}{2}+t\right)\cdot 2t+\left(\frac{a}{2}-t\right)\left(-\frac{a}{2}-t\right)\cdot(-2t)\\&=2t\left(t^2-\frac{a^2}{4}\right)-2t\left(t^2-\frac{a^2}{4}\right)\\&=0\end{aligned}$$

であるから，曲線 $y=f(x)$ は点 $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ に関して対称である．

また，x 軸との交点は $(0,\ 0)$，$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$，$(a,\ 0)$ である．

したがって，直線 $y=-x+a$ が図のように曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交われば，直線 $y=-x$ とも相異なる 3 点で交わり，直線 $y=-x+t$ $(0 \leqq t \leqq a)$ と常に相異なる 3 点で交わるようになる．



$y=x(x-a)(2x-a)$ と $y=-x+a$ を連立して，

$$x(x-a)(2x-a)=-(x-a) \quad \cdots①$$

方程式 ① が $x=a$ 以外に異なる 2 解を持てばよい.
① の $x=a$ 以外の解が満たす方程式は,

$$x(2x-a)=-1 \Longleftrightarrow 2x^2-ax+1=0 \quad \cdots ②$$

② で $x=a$ とすると $a^2+1=0$ となり矛盾するから，② は $x=a$ を解に持たない.
したがって，② が異なる 2 つの実数解を持つ条件を考えて,

$$(-a)^2-4\cdot 2\cdot 1>0 \Longleftrightarrow a^2>8$$

$a>0$ より，$a>2\sqrt{2}$.
(i)，(ii) より $\boldsymbol{a>2\sqrt{2}}$.

$\boxed{\text{注釈}}$

上記の解答では $a \geqq 0$ として考えたが，問題文中で a の範囲を制限する文言がないため，本来は $a<0$ の場合も考えるべきである.
この問題は，次の命題が真となるような a の範囲を求める問題である.

$$0 \leqq t \leqq a \Longrightarrow \text{曲線 } y=f(x) \text{ と直線 } y=-x+t \text{ が相異なる 3 点で交わる}$$

もし $a<0$ であれば，この命題の仮定である $0 \leqq t \leqq a$ を満たす t が存在しないため，命題は真となる.
したがって，この問題を厳密に解釈した場合の解答は $a<0$, $2\sqrt{2}<a$ である.

(2) (与式) $=\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+(x-1)^2}$ より，$x-1=\tan t$ と置換すると $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ であるため,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt\\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

である.

(3) $g(x)=f(x+2)$ とおくと，$g'(x)=f'(x+2)$ より $g'(0)=f'(2)=3 \quad \cdots ①$
このとき，$g(x)$ も 2 次関数であるから，$g(x)=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq 0)$ とおくと，$g'(x)=2ax+b$.
① より $b=3$ となり，$g(x)=ax^2+3x+c$.
次に，与えられた定積分において $x=t+2$ と置換すると,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t+2)\sin\frac{t}{2}dt\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\frac{t}{2}dt\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(at^2\sin\frac{t}{2}+3t\sin\frac{t}{2}+c\sin\frac{t}{2}\right)dt \quad \cdots ②\end{aligned}$$

$\sin\dfrac{t}{2}$，$t^2\sin\dfrac{t}{2}$ は奇関数，$t\sin\dfrac{t}{2}$ は偶関数であるから,

$$\begin{aligned}② &= 2\int_0^{\pi} 3t\sin\frac{t}{2}dt\\ &= 6\Big[4\sin\frac{t}{2}-2t\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{\pi}\\ &= \boldsymbol{24}.\end{aligned}$$