杏林大学医学部（後期）　数学

2019年 3月4日実施

$\boxed{\text{I}}$

$\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{ナ}}$, $\boxed{\text{ニ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを選べ.

(1)　下記 9 個のデータ

$$2,\ 4,\ 1,\ 4,\ 2,\ 5,\ 2,\ 5,\ 2$$

の中央値は $\boxed{\text{ア}}$, 平均値は $\boxed{\text{イ}}$, 最頻値は $\boxed{\text{ウ}}$, 分散は $\boxed{\text{エ}}$ である.

(2)　下記 2 つの条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{2^{(1-n)}}{7}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$a_3 = \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である. $n > 3$ を満たす n に対して上記条件を繰り返し適用すると

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{2^{\boxed{\text{ケ}}}}{7} = \frac{1}{\boxed{\text{コ}}}a_{n-2} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{7}2^{\boxed{\text{ケ}}}$$

のように, a_n をより n の小さい項で表すことができる. よって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}2^{\boxed{\text{セ}}} + \frac{n}{\boxed{\text{ソ}}}2^{\boxed{\text{タ}}}$$

と求められる. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると,

$$S_n = \frac{1}{\boxed{\text{チ}}}\left(\boxed{\text{ツテ}} - \boxed{\text{ト}}2^{\boxed{\text{ナ}}} - n \times 2^{\boxed{\text{ニ}}}\right)$$

であり, 次式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

$\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{ナ}}$, $\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

① $-n-2$　② $-n-1$　③ $-n$　④ $-n+1$　⑤ $-n+2$

解答

(1)　9 個のデータを小さい順に並べると,

$$1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5$$

したがって，中央値は **2**，平均値は

$$\bar{s}=\frac{1+2+2+2+2+4+4+5+5}{9}=\mathbf{3},$$

最頻値は **2** となる．
また，各データの平方の平均値は

$$\overline{s^2}=\frac{1^2+2^2+2^2+2^2+2^2+4^2+4^2+5^2+5^2}{9}=11$$

であるため．分散は $\overline{s^2}-\left(\bar{s}\right)^2=11-3^2=\mathbf{2}$.

(2)　$a_2=\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{1}{7}=\dfrac{9}{14}$，$a_3=\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{2^{-1}}{7}=\mathbf{\dfrac{11}{28}}$.

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad\cdots①$$

を繰り返し用いて，

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{2^{2-n}}{7}}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}a_{n-2}+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
&=\frac{1}{4}a_{n-2}+\frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{4}a_{n-2}+\frac{2}{7}2^{2-n}}
\end{aligned}$$

① の両辺に 2^{n+1} をかけて，

$$2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+\frac{4}{7}$$

したがって，数列 $\{2^na_n\}$ は交差 $\dfrac{4}{7}$ の等差数列だから

$$\begin{aligned}
2^na_n&=2^1a_1+\frac{4}{7}(n-1)\\
&=\frac{4n+10}{7}\\
a_n&=\frac{4n+10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&=\frac{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{4n}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{n}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
&=\boldsymbol{\frac{5}{7}2^{1-n}+\frac{n}{7}2^{2-n}}
\end{aligned}$$

更に $a_n=\dfrac{4n+10}{7}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ を適当な定数 A，B を用いて次のように変形する．

$$a_n=\frac{An+B}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{A(n-1)+B}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad\cdots②$$

これは,

$$a_n = \frac{-An + 2A - B}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となるから,

$$\begin{cases} -A = 4 \\ 2A - B = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -4 \\ B = -18 \end{cases}$$

とすればよい. したがって ② より

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{Ak+B}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{A(k-1)+B}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\} \\ &= \frac{An+B}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{B}{7} \\ &= -\frac{4n}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{18}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{18}{7} \\ &= -\frac{n}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \frac{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{18}{7} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{7}(18 - 9 \cdot 2^{1-n} - n \times 2^{2-n})} \end{aligned}$$

である. こうして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{18}{7}}$ となる.

$\boxed{\text{Ⅱ}}$

原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に対し，極方程式 $r=\dfrac{5}{3-2\cos\theta}$ で表される楕円を C とする．

(a)　楕円 C 上の点 $(x,\ y)$ は，下記の方程式を満たす．

$$\frac{\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2}{\boxed{\text{イ}}}+\frac{y^2}{\boxed{\text{ウ}}}=1$$

楕円 C の 2 つの焦点のうち，x 座標の値が大きいものは $(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}})$ であり，楕円 C の離心率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 C 上を動くとき，$2x+y$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}+\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である．

(b)　2 つの焦点の中点が頂点と一致するように，C を x 軸の負の方向に $\boxed{\text{サ}}$ だけ平行移動して得られる楕円を D とする．楕円 D の接線と x 軸，および y 軸で囲まれる三角形の面積の最小値は $\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ であり，最小値を実現する楕円 D の接線は $\boxed{\text{セ}}$ 本存在する．このうち，第 1 象限にある接点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}\right)$ である．

(c)　複素数平面において，点 z が原点を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$x+iy=z+\frac{k}{z}\quad (\text{ただし，} i \text{ は虚数単位，} k \text{ は実数定数})$$

を満たす実数の組 $(x,\ y)$ の描く図形が楕円 D であったとすると，

$$t=\frac{\boxed{\text{ナ}}+\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}},\ k=\boxed{\text{ネ}}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{解答}}$

(a)　$r=\dfrac{5}{3-2\cos\theta}$ より，$3r=2r\cos\theta+5$ であるから，両辺を 2 乗すると，

$$9r^2=(2r\cos\theta+5)^2$$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ より，

$$\begin{aligned}9(x^2+y^2)=(2x+5)^2 &\iff 9x^2+9y^2=4x^2+20x+25\\ &\iff 5(x-2)^2+9y^2=45\\ &\iff \boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1}\end{aligned}$$

楕円 C の 2 つの焦点は $(2\pm\sqrt{9-5},\ 0)$，すなわち $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$ であるから，x 座標の値が大きいものは，**$(4,\ 0)$** である．

また，焦点 $(0,\ 0)$ を F，準線 l の方程式を $x=k$ とする．

楕円 C は，焦点 F からの距離と，準線 l からの距離の比が一定値 e となる点の集合であり，このときの定数 e を

離心率という．
したがって，次の式の値が θ によらず一定となればよい．

$$\begin{aligned}\left|\frac{r}{r\cos\theta-k}\right| &= \left|\frac{1}{\cos\theta-\dfrac{k}{r}}\right| \\ &= \left|\frac{1}{\cos\theta-\dfrac{k}{5}(3-2\cos\theta)}\right| \\ &= \left|\frac{1}{\left(1+\dfrac{2}{5}k\right)\cos\theta-\dfrac{3}{5}k}\right|\end{aligned}$$

この値が一定となるとき，$1+\dfrac{2}{5}k=0 \iff k=-\dfrac{5}{2}$ であり，離心率 e は,

$$e=\left|\frac{1}{-\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)}\right|=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

C 上の点 P を $(2+3\cos t,\ \sqrt{5}\sin t)$ とすると,

$$\begin{aligned}2x+y&=4+\sqrt{5}\sin t+6\cos t \\ &=4+\sqrt{(\sqrt{5})^2+6^2}\sin(t+\alpha) \\ &=4+\sqrt{41}\sin(t+\alpha)\end{aligned}$$

となる実数 α が存在する．
$t+\alpha$ は実数全体を動けるから，$2x+y$ の最大値は $\boldsymbol{4+\sqrt{41}}$ である．

(b)　楕円 C の 2 つの焦点の中点は $\left(\dfrac{0+4}{2},\ 0\right)=(2,\ 0)$ であるから，C を x 軸の負の方向に $\mathbf{2}$ だけ平行移動すればよい．このとき，楕円 D の方程式は次のようになる．

$$D: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

これは x 軸，y 軸，原点に関して対称なので，第 1 象限にある D 上の点を $\mathrm{Q}(3\cos u,\ \sqrt{5}\sin u)$ とする．（ただし，$0<u<\dfrac{\pi}{2}$）．
点 Q における D の接線の方程式は,

$$\frac{3\cos u}{9}x+\frac{\sqrt{5}\sin u}{5}y=1 \iff \frac{\cos u}{3}x+\frac{\sin u}{\sqrt{5}}y=1$$

したがって，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ R，S とすると，$\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{\cos u},\ 0\right)$，$\mathrm{S}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{\sin u}\right)$ であり,

$$\triangle\mathrm{ORS}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\cos u}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sin u}=\frac{3\sqrt{5}}{\sin 2u}$$

$0<2u<\pi$ より $0<\sin 2u \leqq 1$ であるから，$\triangle\mathrm{ORS}$ の面積は $2u=\dfrac{\pi}{2} \iff u=\dfrac{\pi}{4}$ において最小値 $\boldsymbol{3\sqrt{5}}$ をとる．

最小値を実現する楕円 D の接線は，各象限に接点が 1 個ずつあるから **4** 本存在する．
このうち，第 1 象限にある接点の座標は，

$$\left(3\cos\frac{\pi}{4},\ \sqrt{5}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{10}}{2}}\right)$$

(c)　$z=r(\cos\phi+\sin\phi)$ とおくと，

$$\begin{aligned}x+iy&=z+\frac{k}{z}\\&=r(\cos\phi+i\sin\phi)+\frac{k}{r}(\cos\phi-i\sin\phi)\\&=\left(r+\frac{k}{r}\right)\cos\phi+i\left(r-\frac{k}{r}\right)\sin\phi\end{aligned}$$

実部，虚部を比較すると，

$$x=\left(r+\frac{k}{r}\right)\cos\phi,\ y=\left(r-\frac{k}{r}\right)\sin\phi$$

$(x,\ y)$ の描く図形が楕円 D であったとすると，

$$\left(r+\frac{k}{r},\ r-\frac{k}{r}\right)=(\pm3,\ \pm\sqrt{5})\ (\text{複号任意})$$

したがって，

$$2r=\pm3\pm\sqrt{5}\ (\text{複号任意})$$

となるが，r は円の半径で正の値なので，$\left(r+\frac{k}{r},\ r-\frac{k}{r}\right)=(3,\ \pm\sqrt{5})$ の 2 組に絞ることができ，

$$(r,\ k)=\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ 1\right)$$

このうち，問題文の形式に合うものは，$r=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$，$k=\mathbf{1}$．

Ⅲ

座標空間において，点 $A(0,\ 0,\ 6\sqrt{2})$，$B(0,\ -3,\ 0)$ を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点を P とし，線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を C とする．

(a) AB = $\boxed{\text{ア}}$ であり，曲面 C を線分 AB によって切り開いて得られる展開図は，中心角 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ の扇形である．

(b) 曲面 C と xy 平面との共有点のうち，点 P からの距離が最大となる点 Q の座標は $(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}},\ 0)$ であり，$PQ = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ が成りたつ．

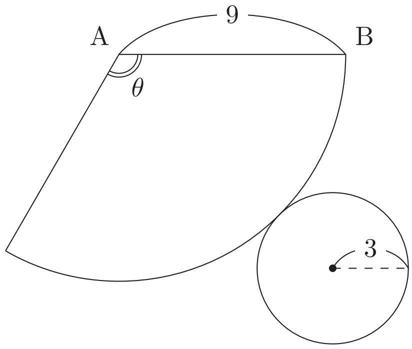
(c) 2 点 P，Q を最短で結ぶ曲面 C 上の曲線を L とする．L の長さは $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である．曲線 L と xz 平面との交点を R とすると，$AR = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ が成り立つ．

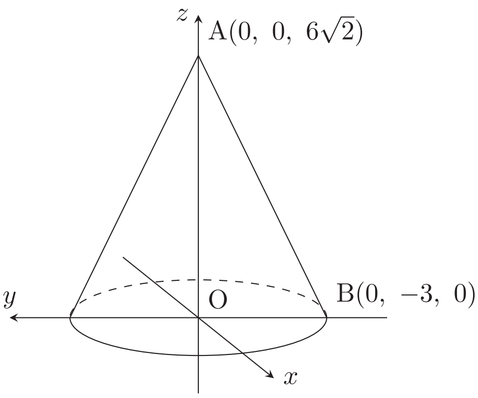
(d) 曲線 L 上の動点を S とする．点 S が点 P から出発して点 Q に至る間に，線分 AS が通過する領域の面積は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である．

解答

以下，展開図とは「曲面 C を線分 AB によって切り開いて得られる展開図」を指すものとする．

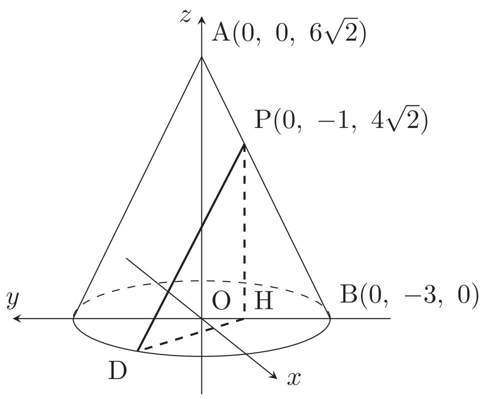
(a) $AB = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-6\sqrt{2})^2} = \sqrt{81} = \mathbf{9}$





曲面 C は半径 3 の円を底面とし，母線の長さが 9 の直円錐の側面である．展開図を考えて扇形の中心角を θ とすると，$9\theta = 2\cdot 3\cdot \pi$．よって $\theta = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$

(b)

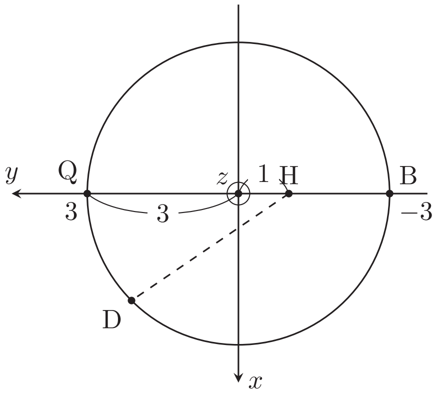


曲面 C と xy 平面との共有点は，原点 O を中心とする半径 3 の円を描く．その円周上を動く点を D とする．

また，点 P から xy 平面に下ろした垂線の足を H とすると，三平方の定理から

$$\mathrm{PD}^2=\mathrm{PH}^2+\mathrm{HD}^2=\left(6\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2+\mathrm{HD}^2=32+\mathrm{HD}^2$$

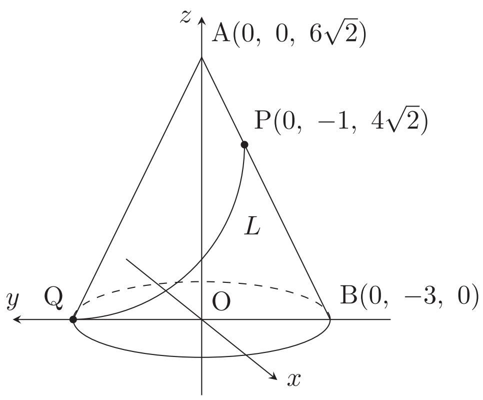
が成り立つ．HD が最大になるとき，PD も最大となるので，そのときの点 D が点 Q である．



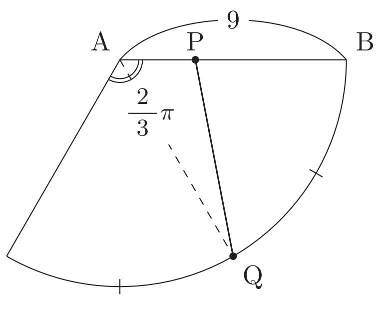
図のように，HD が最大になるのは，点 D が (0, 3, 0) にあるときだから，Q(0, 3, 0)．

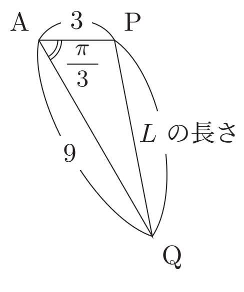
よって，$\mathrm{PQ}^2=32+\mathrm{HQ}^2=32+(1+3)^2=48$ である．よって $\mathrm{PQ}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$.

(c)



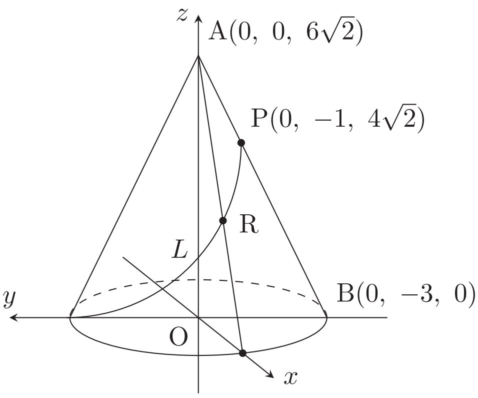
展開図を考えると，点 Q は扇形の円弧を 2 等分する．

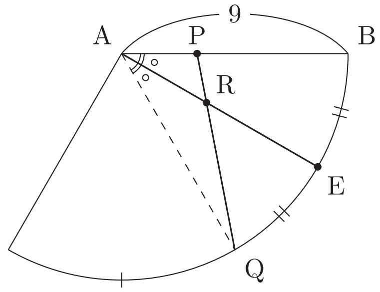




この展開図において，線分 PQ の長さが L の長さとなるから，上左図のようになる．△APQ に注目すると，余弦定理より

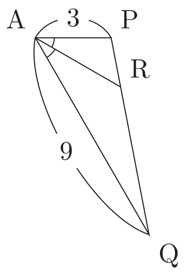
$$\begin{aligned}(L\text{ の長さ})&=\sqrt{81+9-2\cdot9\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}}\\&=\sqrt{63}\\&=\boldsymbol{3\sqrt{7}}\end{aligned}$$





曲面 C と x 軸との交点を E とする．点 R は AE と曲線 L との交点であるから，展開図を考える．$\overset{\frown}{\mathrm{QE}}=\overset{\frown}{\mathrm{EB}}$ なので，$\angle\mathrm{QAE}=\angle\mathrm{EAB}=\dfrac{\pi}{6}\quad\cdots$①

△APQ に注目する．



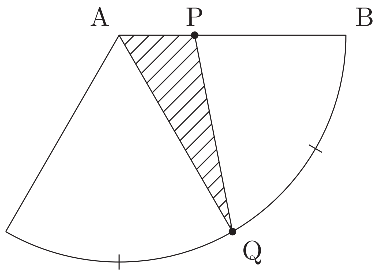
① より，$\angle\mathrm{QAR}=\angle\mathrm{PAR}=\dfrac{\pi}{6}$ であることから，三角形の面積に注目して

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AR}\cdot 9\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AR}\cdot 3\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 9\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{9}{2}\mathrm{AR}+\frac{3}{2}\mathrm{AR}=\frac{27}{2}\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AR}=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$$

(d)　線分 AS が通過する部分の展開図を考えると，次のようになる．（図の斜線部）



つまり，この展開図における △APQ の面積が，線分 AS が通過する部分の面積になる．

よって，$\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 9\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{27}{4}\sqrt{3}}$.

$\boxed{\text{IV}}$

座標平面において，$y=\dfrac{3}{2}x^2$ のグラフを放物線 C，原点で C に接する半径 R の下に凸の半円を S とする．放物線 C 上を運動する点 P の x 座標が，時刻 t において $x=2t-4$ と表されるものとする．

(a) 時刻が $t=0$ から 3 まで経過したとすると，この間の点 P の y 座標は，$t=\boxed{\text{ア}}$ において最大値 $\boxed{\text{イウ}}$ をとり，$t=\boxed{\text{エ}}$ において最小値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる．以下，この最小値を実現する時刻を t_m とする．

(b) 時刻が $t \fallingdotseq t_m$ のとき，点 P における放物線 C の法線の方程式は

$$y=\frac{1}{\boxed{\text{カ}}(t_m-t)}x+\boxed{\text{キ}}t^2-\boxed{\text{クケ}}t+\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である．この法線の y 切片を $r(t)$ とすると

$$\lim_{t\to t_m} r(t)=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

が成り立つ．この極限値を ρ とする．

(c) 時刻 t における点 P の速さ v と加速度 $\vec{a}$ は

$$v=\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}(t-t_m)^2+\boxed{\text{ツ}}}$$
$$\vec{a}=(\boxed{\text{テ}},\ \boxed{\text{トナ}})$$

と表される．したがって，時刻 $t=t_m$ において $\rho\times|\vec{a}|=v^{\boxed{\text{ニ}}}$ が成り立つ．

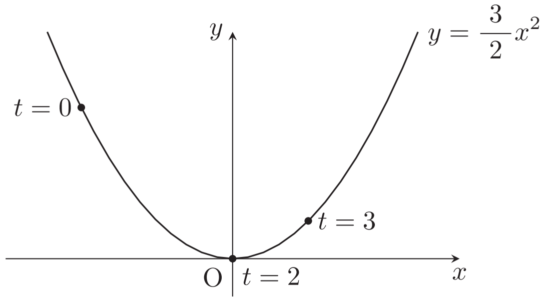
(d) $t_m-\dfrac{1}{8}\leqq t\leqq t_m+\dfrac{1}{8}$ を満たす時刻 t において，半円 S 上にある点 Q は，その x 座標が点 P の x 座標と一致するように運動した．2 点 P，Q の y 座標をそれぞれ y，Y とすると，

$$Y=R-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}x^{\boxed{\text{ネ}}}+R^2}$$

と書けるので，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{Y-y}{y}=0$ となるように S の半径 R を決めると $\dfrac{R}{\rho}=\boxed{\text{ノ}}$ が成り立つ．

$\boxed{\text{解答}}$

(a)



$t=0$ のとき，点 P の座標は $(-4,\ 24)$，$t=3$ のとき，点 P の座標は $(2,\ 6)$ である．よって，放物線 C の形から，点 P の y 座標は $t=\mathbf{0}$ において最大値 $\mathbf{24}$，$t=\mathbf{2}$ において最小値 $\mathbf{0}$ をとる．つまり $t_m=\mathbf{2}$ である．

(b) $\mathrm{P}(2t-4,\ 6t^2-24t+24)$ と書ける．よって，点 P における放物線 C の法線の方程式は $t \fallingdotseq 2$ より

$$y=\frac{1}{6(2-t)}\{x-(2t-4)\}+6t^2-24t+24$$

を計算して

$$y = \frac{1}{6(2-t)}x + 6t^2 - 24t + \frac{73}{3}$$

ここで $t_m = 2$ であるから，法線の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{6(t_m - t)}}x + 6t^2 - 24t + \frac{73}{3}$$

よって，$r(t) = 6t^2 - 24t + \dfrac{73}{3}$ であるから

$$\lim_{t \to t_m} r(t) = \lim_{t \to 2} r(t) = 24 - 48 + \frac{73}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

つまり，$\rho = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ である．

(c)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = 6t^2 - 24t + 24 \end{cases}$ であるから，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 12t - 24 = 12(t-2) \end{cases}$$

よって，

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= 2\sqrt{1 + 36(t-2)^2} \\ &= \boldsymbol{2\sqrt{(t - t_m)^2 + 1}} \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

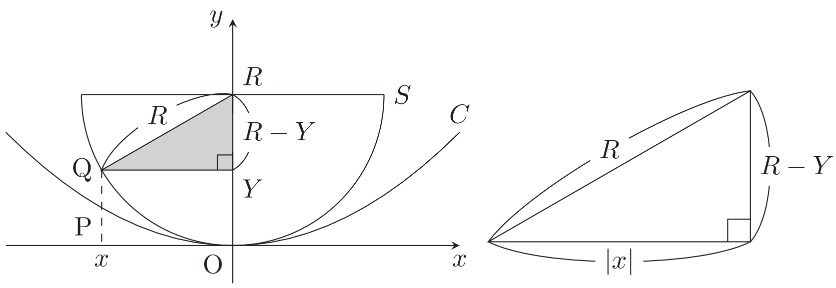
さらに，

$$\overrightarrow{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \boldsymbol{(0,\ 12)} \quad \cdots ②$$

$t = t_m = 2$ を ① に代入して $v = 2$，② より $|\overrightarrow{a}| = 12$.

よって，$\rho \times |\overrightarrow{a}| = \dfrac{1}{3} \times 12 = 4 = \boldsymbol{v^2}$.

(d)



図のように，$x \fallingdotseq 0$ において斜線部分の直角三角形に注目し，三平方の定理を考えると

$$R - Y = \sqrt{R^2 - x^2} \iff Y = R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \cdots ③$$

である．$x = 0$ のときも $Y = 0$ となり題意をみたす．

また，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{Y - y}{y} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{Y}{y} - 1\right) = 0$ に，③ と $y = \dfrac{3}{2}x^2\ (x \fallingdotseq 0)$ を用いることで，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{R-\sqrt{R^2-x^2}}{x^2}-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{R+\sqrt{R^2-x^2}}-1\right)=0$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2R}=1 \quad \therefore\ R=\frac{1}{3}$$

ゆえに，$\dfrac{R}{\rho}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\mathbf{1}$ である．

講評

$\boxed{\text{I}}$（データの分析・漸化式）

(1) のデータ分析は基礎問題であったが，(2) の漸化式の問題については，誘導がやや複雑であり，計算量も多かった．ここで時間を取られると考えられる．

$\boxed{\text{II}}$（楕円・複素数平面）

基本的な問題である．しかし，離心率のところだけは手が止まったと考えられる．離心率に触れたことがない受験生がほとんどだと思うので，思い切って飛ばし，次の問題に取り組むべきだろう．

$\boxed{\text{III}}$（空間図形・幾何）

直円錐の展開図を考察させる問題．高校入試では類似問題を見かけることもあるが，大学入試ではほとんど出ない問題なので，問題設定としてこの問題は難しかったと思われる．

$\boxed{\text{IV}}$（微分法・極限）

計算量もなく，問題の誘導に従うだけの平易な問題であり，一番点数が取りやすい大問だったと言える．

全体として基本的なレベルの問題ばかりであるが，量が多く，問題の読み取りにも時間が掛かる．計算ミスをしたり，立ち回りを間違えると，時間内に高得点を取ることが難しい出題と言える．しかし，後期の倍率を考えると，高得点が必要になる．1 次合格ラインは 70 %程度と考えられる．