医学部専門予備校 YMS
heart of medicine
医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東京女子医科大学　数学

2020年 1月23日実施

受験生からの聞き取りにより問題を再現し、再現した問題に対しての解答を作成しています。

1

xy 平面において，$0 \leqq x \leqq 2\pi$，$0 \leqq y \leqq x \sin nx$ で囲まれた面積を S_n とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

解答

$y \geqq 0$ となるのは，$\dfrac{(2k-2)\pi}{n} \leqq x \leqq \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ の区間である．

したがって，求める面積 S_n は，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} x \sin nx dx$$

である．$nx = \theta$ とおく．$dx = \dfrac{1}{n}d\theta$，

x	$\dfrac{(2k-2)\pi}{n}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{(2k-1)\pi}{n}$
θ	$(2k-2)\pi$	$\longrightarrow$	$(2k-1)\pi$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\theta}{n} \sin\theta \cdot \frac{1}{n} d\theta$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta \sin\theta d\theta \cdots\cdots (*)$$

いま，区間 $(2k-2)\pi \leqq \theta \leqq (2k-1)\pi$ において，

$$(2k-2)\pi \sin\theta \leqq \theta\sin\theta \leqq (2k-1)\pi\sin\theta$$

であるから，

$$(2k-2)\pi \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \sin\theta d\theta < \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta\sin\theta d\theta < (2k-1)\pi \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \sin\theta d\theta$$

$$4(k-1)\pi < \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta\sin\theta d\theta < 2(2k-1)\pi$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 4(k-1)\pi < S_n < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 2(2k-1)\pi$$

$$\frac{4\pi}{n^2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n < S_n < \frac{2\pi}{n^2}\left\{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n\right\} \cdots\cdots ①$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\pi}{n^2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n = 2\pi$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n^2}\left\{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n\right\} = 2\pi$$

であるから，① ではさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{2\pi}$.

$\boxed{\text{別解}}$

$(*)$ からの計算

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}\theta\sin\theta d\theta.$$

ここで

$$\begin{aligned}\int\theta\sin\theta d\theta &= \theta\cdot(-\cos\theta) - \int 1\cdot(-\cos\theta)d\theta \\ &= -\theta\cos\theta + \sin\theta + C \qquad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}\theta\sin\theta d\theta &= \Big[-\theta\cos\theta + \sin\theta\Big]_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \\ &= -(2k-1)\pi\cdot(-1) + 2(k-1)\pi\cdot 1 \\ &= (4k-3)\pi.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(4k-3)\pi \\ &= \frac{1}{n^2}\left\{4\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 3n\right\}\pi \\ &= \left(2 - \frac{1}{n}\right)\pi\end{aligned}$$

より

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{2\pi}$$

II

たて，横，高さがそれぞれ x, y, z であるような直方体がある．

$$x+y+z=a,\ \text{表面積が}\frac{a^2}{2}$$

を満たすとき，体積 V の最大値を求めよ．

解答

条件より

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ 2(xy+yz+zx)=\dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=a \\ xy+yz+zx=\dfrac{a^2}{4} \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

また，体積 V は，

$$V=xyz\cdots\cdots②$$

① , ② より，$t=x$, y, z を解に持つ t の 3 次方程式を作ると，

$$(t-x)(t-y)(t-z)=0$$

$$\iff t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$$

$$\iff t^3-at^2+\frac{a^2}{4}t=V.\cdots\cdots③$$

③ が正の実数解を 3 つ持つような V の条件を求める．

$$f(t)=t^3-at^2+\frac{a^2}{4}t$$

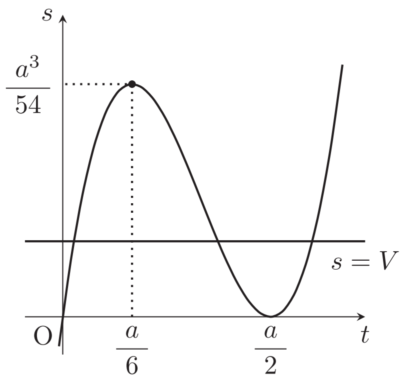
とおくとき，③ の正の実数解は，$s=f(t)$ のグラフと，直線 $s=V$ との共有点の t 座標に等しい．

$$f'(t)=3t^2-2at+\frac{a^2}{4}$$
$$=3\left(t-\frac{a}{6}\right)\left(t-\frac{a}{2}\right).$$

したがって，増減表は以下のようになる．

t	$\cdots$	$\frac{a}{6}$	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$\frac{a^3}{54}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

グラフより，$s=f(t)$ と $s=V$ の共有点から，正の実数解が 3 つ存在する条件は，$0\leqq V\leqq\dfrac{a^3}{54}$.



したがって，求める V の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{a^3}{54}}$．

$\boxed{\text{別解}}$

② からの計算

ここで，① より $y+z=a-x$，$yz=\dfrac{a^2}{4}-(y+z)x=\dfrac{a^2}{4}-ax+x^2$ であるので，② に代入して

$$\begin{aligned}V&=x\left(\frac{a^2}{4}-ax+x^2\right)\\&=x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x\end{aligned}$$

また，y, z は u の二次方程式 $u^2-(a-x)u+\dfrac{a^2}{4}-ax+x^2=0$ の正の 2 実数解であるので，判別式を D とすると

$$D\geqq 0,\ y+z>0,\ yz>0$$

$$\therefore\ 0<x\leqq\frac{2}{3}a,\ x\fallingdotseq\frac{a}{2}$$

このとき

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx}&=3x^2-2ax+\frac{a^2}{4}\\&=\frac{1}{4}(6x-a)(2x-a)\end{aligned}$$

より，増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{a}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{a^3}{54}$	$\searrow$	(0)	$\nearrow$	$\frac{a^3}{54}$

よって，求める V の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{a^3}{54}}$．

Ⅲ

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$ の値を求めよ．

解答

$k^2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = f(k+1) - f(k)$ とおけば，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\} \\ &= f(n+1)-f(1)\end{aligned}$$

と求まる．ここで，

$$f(k) = (pk^2+qk+r)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

とおくと，

$$\begin{aligned}f(k+1) &= \{p(k+1)^2+q(k+1)+r\}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \left\{\frac{p}{2}k^2 + \left(p+\frac{q}{2}\right)k + \frac{p+q+r}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ f(k+1)-f(k) &= \left\{-\frac{p}{2}k^2 + \left(p-\frac{q}{2}\right)k + \frac{p+q-r}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

これが $k^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ と一致するので，

$$\begin{aligned}&-\frac{p}{2}=1,\ p-\frac{q}{2}=0,\ \frac{p+q-r}{2}=0 \\ &\iff (p,\ q,\ r) = (-2,\ -4,\ -6)\end{aligned}$$

したがって，求める和は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k &= f(n+1)-f(1) \\ &= \{-2(n+1)^2-4(n+1)-6\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (-6) \\ &= \boldsymbol{6-(n^2+4n+6)\left(\frac{1}{2}\right)^n}.\end{aligned}$$

別解

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k$ とおく．

$$S_n = 1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{2}S_n = \qquad 1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots\cdots②$$

①－② より

$$\frac{1}{2}S_n = 1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots\cdots③$$

$$\frac{1}{4}S_n = \qquad 1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \cdots\cdots④$$

③－④ より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}S_n &= 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left\{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} - n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}} - n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\
&= \frac{1}{2} + 1 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{3}{2} - \left(\frac{n^2}{4} + n + \frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

よって

$$S_n = \boldsymbol{6-(n^2+4n+6)\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

$\boxed{\text{IV}}$

$2^{n+1} \geqq n^3$ を満たす自然数 n をすべて求めよ.

解答

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
2^{n+1}	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	$\cdots$
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	$\cdots$

上表より，$n = 1,\ 2,\ n \geqq 8$ であると予想できる.
以下，$n \geqq 8$ を満たすすべての自然数 n について

$$2^{n+1} \geqq n^3 \cdots\cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す.

(i)　$n = 8$ のとき

左辺 $= 2^9 = 512$，右辺 $= 8^3 = 512$ となり $(*)$ は成立する.

(ii)　$n = k\ (k \geqq 8)$ のとき

$(*)$ が成立すると仮定すると，$2^{k+1} \geqq k^3$.

このとき，$n = k+1$ について

$$\begin{aligned}
&2^{k+2} - (k+1)^3 \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\
&\geqq 2k^3 - (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \qquad (\because \text{仮定}) \\
&= k^3 - 3k^2 - 3k - 1 \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

ここで，$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$（$x$ は実数）について，$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x-1)^2 - 6$ より，$f'(8) = 3 \cdot 7^2 - 6$ と併せて，$f(x)$ は $x \geqq 8$ において単調に増加する。すなわち $k \geqq 8$ のとき，$f(8) > 0$ より ① > 0.

したがって，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

よって，以上 (i)，(ii) より，$n \geqq 8$ で $(*)$ は成立するので，求める自然数 n は $\boldsymbol{n = 1,\ 2,\ n \geqq 8}$.

講評

大問 1 が簡単そうに見えるが，ここをまともに取り組むと，時間が掛かってしまい，全体として点数が取りにくい設問になっている．大問 2 と大問 3 が典型的な問題であり，ここをしっかり取ることが一次突破の鍵となっただろう．問題選びが重要であった．

全体として 60 %をとりたいところだが，60 分という時間の短さを考えると，50 %弱でも十分一次突破のチャンスはある．