医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

東京女子医科大学　数学

2020年 1月23日実施

受験生からの聞き取りにより問題を再現し、再現した問題に対して解答を作成しています。

1

xy 平面において，$0 \leqq x \leqq 2\pi$，$0 \leqq y \leqq x\sin nx$ で囲まれた面積を S_n とおく．

このとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

【解説】

$y \geqq 0$ となるのは，$\dfrac{(2k-2)\pi}{n} \leqq x \leqq \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ の区間である．

したがって，求める面積 S_n は，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} x\sin nx\,dx$$

$nx = \theta$ とおく．$dx = \dfrac{1}{n}d\theta$，

x	$\dfrac{(2k-2)\pi}{n}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{(2k-1)\pi}{n}$
θ	$(2k-2)\pi$	$\longrightarrow$	$(2k-1)\pi$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\theta}{n}\sin\theta \cdot \frac{1}{n}d\theta$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta\sin\theta\,d\theta \quad \cdots(*)$$

いま，区間 $(2k-2)\pi \leqq \theta \leqq (2k-1)\pi$ において，

$$(2k-2)\pi\sin\theta \leqq \theta\sin\theta \leqq (2k-1)\pi\sin\theta$$

であるから，

$$(2k-2)\pi\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}\sin\theta\,d\theta < \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}\theta\sin\theta\,d\theta < (2k-1)\pi\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$4(k-1)\pi < \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}\theta\sin\theta\,d\theta < 2(2k-1)\pi$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}4(k-1)\pi < S_n < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2(2k-1)\pi$$

$$\frac{4\pi}{n^2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n < S_n < \frac{2\pi}{n^2}\left\{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\} \quad \cdots①$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{n^2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n = 2\pi,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^2}\left\{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\} = 2\pi$$

であるから，① ではさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} S_n = 2\pi$．

<u>【別解】（$*$）からの計算</u>

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}\theta\sin\theta\,d\theta.$$

ここで

$$\int\theta\sin\theta\,d\theta = \theta\cdot(-\cos\theta) - \int 1\cdot(-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=-\theta\cos\theta+\sin\theta+C \quad (C\text{は積分定数})$$

であるので

$$\int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}\theta\sin\theta\,d\theta=\Big[-\theta\cos\theta+\sin\theta\Big]_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi}$$
$$=-(2k-1)\pi\cdot(-1)+2(k-1)\pi\cdot 1$$
$$=(4k-3)\pi.$$

よって

$$S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(4k-3)\pi$$
$$=\frac{1}{n^2}\left\{4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-3n\right\}\pi$$
$$=\left(2-\frac{1}{n}\right)\pi$$

より

$$\lim_{n\to\infty}S_n=2\pi.$$

2

たて，横，高さがそれぞれ x，y，z であるような直方体がある．

$x+y+z=a$，表面積が $\dfrac{a^2}{2}$

を満たすとき，体積 V の最大値を求めよ．

条件より，

$$\begin{cases}x+y+z=a\\ 2(xy+yz+zx)=\dfrac{a^2}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}x+y+z=a\\ xy+yz+zx=\dfrac{a^2}{4}\end{cases}\quad\cdots①$$

また，体積 V は，

$$V=xyz.\quad\cdots②$$

①，② より，$t=x$，y，z を解に持つ t の 3 次方程式を作ると，

$$(t-x)(t-y)(t-z)=0.$$
$$\iff t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0.$$
$$\iff t^3-at^2+\frac{a^2}{4}=V.\quad\cdots③$$

③ が正の実数解を 3 つ持つような V の条件を求める．

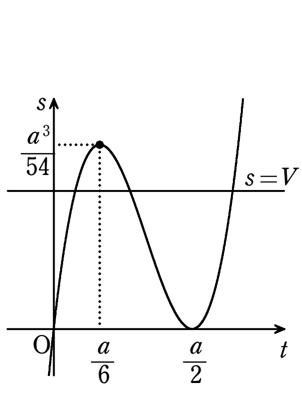
$$f(t)=t^3-at^2+\frac{a^2}{4}t$$

とおくとき，③ の正の実数解は，$s=f(t)$ のグラフと，直線 $s=V$ との共有点の t 座標に等しい．

$$f'(t)=3t^2-2at+\frac{a^2}{4}=3\left(t-\frac{a}{6}\right)\left(t-\frac{a}{2}\right).$$

したがって，増減表は以下のようになる．

t	$\cdots$	$\frac{a}{6}$	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$\frac{a^3}{54}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



グラフより，$s=f(t)$ と $s=V$ の共有点から，正の実数解が 3 つ存在する条件は，$0<V\leqq\dfrac{a^3}{54}$．

したがって，求める V の最大値は $\dfrac{a^3}{54}$.

【別解】②からの計算

ここで，①より $y+z=a-x$，$yz=\dfrac{a^2}{4}-(y+z)x=\dfrac{a^2}{4}-ax+x^2$ であるので，②に代入して

$$V=x\left(\frac{a^2}{4}-ax+x^2\right)=x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x$$

また，y，z は u の 2 次方程式 $u^2-(a-x)u+\dfrac{a^2}{4}-ax+x^2=0$ の正の 2 実数解であるので，判別式を D とすると

$$D\geqq 0\ ,\quad y+z>0\ ,\quad yz>0$$

$$\therefore\quad 0<x\leqq\frac{2}{3}a\ ,\quad x\fallingdotseq\frac{a}{2}$$

このとき

$$\frac{dV}{dx}=3x^2-2ax+\frac{a^2}{4}=\frac{1}{4}(6x-a)(2x-a)$$

より，増減表は次のようになる.

x	(0)		$\dfrac{a}{6}$		$\left(\dfrac{a}{2}\right)$		$\dfrac{2}{3}a$
$\dfrac{dV}{dx}$		$+$	0	$-$		$+$	
V	(0)	$\nearrow$	$\dfrac{a^3}{54}$	$\searrow$	(0)	$\nearrow$	$\dfrac{a^3}{54}$

よって，求める V の最大値は $\dfrac{a^3}{54}$.

3

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

【解説】

$$k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k=f(k+1)-f(k)$$

とおけば,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\}=f(n+1)-f(1)$$

と求まる．ここで,

$$f(k)=(pk^2+qk+r)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

とおくと,

$$f(k+1)=\{p(k+1)^2+q(k+1)+r\}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$=\left\{\frac{p}{2}k^2+\left(p+\frac{q}{2}\right)k+\frac{p+q+r}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$f(k+1)-f(k)=\left\{-\frac{p}{2}k^2+\left(p-\frac{q}{2}\right)k+\frac{p+q-r}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

これが $k^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ と一致するので,

$$-\frac{p}{2}=1,\ p-\frac{q}{2}=0,\ \frac{p+q-r}{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow\ (p,\ q,\ r)=(-2,\ -4,\ -6)$$

したがって，求める和は,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k = f(n+1)-f(1)$$

$$=\{-2(n+1)^2-4(n+1)-6\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(-6)$$

$$=6-(n^2+4n+6)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

【別解】

$S_n=\sum_{k=1}^{n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k$ とおく.

$$S_n=1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots ①$$

$$\frac{1}{2}S_n= \qquad 1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-2)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(n-1)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$\frac{1}{2}S_n=1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \cdots ③$$

$$\frac{1}{4}S_n= \qquad 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(2n-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \quad \cdots ④$$

③ − ④ より

$$\frac{1}{4}S_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$=\frac{1}{2}+1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{2n-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{3}{2}-\left(\frac{n^2}{4}+n+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって

$$S_n=6-(n^2+4n+6)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\boxed{4}$

$2^{n+1} \geqq n^3$ を満たす自然数 n をすべて求めよ.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
2^{n+1}	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	…
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	…

上表より, $n=1$, 2 , $n \geqq 8$ であると予想できる.

以下, $n \geqq 8$ を満たすすべての自然数 n について

$$2^{n+1} \geqq n^3 \quad \cdots \ (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す.

i) $n=8$ のとき

($*$の左辺)$=2^9=512$, ($*$の右辺)$=8^3=512$ となり, ($*$) は成立する.

ii）　$n=k$ ($k \geqq 8$) のとき

(＊) が成立すると仮定すると，　$2^{k+1} \geqq k^3$

このとき，　$n=k+1$ について

$$\begin{aligned} & 2^{k+2}-(k+1)^3 \\ &= 2 \cdot 2^{k+1}-(k^3+3k^2+3k+1) \\ &\geqq 2k^3-(k^3+3k^2+3k+1) \quad (\because 仮定) \\ &= k^3-3k^2-3k-1 \quad \cdots \quad ① \end{aligned}$$

ここで，　$f(x)=x^3-3x^2-3x-1$ (x は実数) について，

$f'(x)=3x^2-6x-3=3(x-1)^2-6$ より，　$f'(8)=3 \cdot 7^2-6>0$ と併せて，　$f(x)$ は $x \geqq 8$ において単調に増加する．

すなわち，$k \geqq 8$ のとき，$f(8)>0$ より ① >0．

したがって，　$n=k+1$ のときも (＊) は成立する．

よって，以上 i) ii) より，　$n \geqq 8$ で (＊) は成立するので，求める自然数 n は

$$n=1,\ 2,\ n \geqq 8$$

【講評】

大問 1 が簡単そうに見えるが，ここをまともに取り組むと，時間が掛かってしまい，全体として点数が取りにくい設問になっている．大問 2 と大問 3 が典型的な問題であり，ここをしっかり取ることが一次突破の鍵となっただろう，問題選びが重要であった．

全体として60%をとりたいところだが，60分という時間の短さを考えると，50%弱でも十分一次突破のチャンスはある．