

## 東京女子医科大学 数学

2020年1月23日実施

受験生からの聞き取りにより問題を再現し、再現した問題に対して解答を作成しています。

1

$xy$  平面において、 $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq x \sin nx$  で囲まれた面積を  $S_n$  とおく。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

【解説】

$y \geq 0$  となるのは、 $\frac{(2k-2)\pi}{n} \leq x \leq \frac{(2k-1)\pi}{n}$  ( $k=1, 2, 3, \dots, n$ ) の区間である。

したがって、求める面積  $S_n$  は、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(2k-2)\pi}{n}}^{\frac{(2k-1)\pi}{n}} x \sin nx \, dx$$

$$nx = \theta \text{ とおく. } dx = \frac{1}{n} d\theta, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & \frac{(2k-2)\pi}{n} \longrightarrow \frac{(2k-1)\pi}{n} \\ \hline \theta & (2k-2)\pi \longrightarrow (2k-1)\pi \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\theta}{n} \sin \theta \cdot \frac{1}{n} d\theta \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta \sin \theta \, d\theta \quad \dots (*) \end{aligned}$$

いま、区間  $(2k-2)\pi \leq \theta \leq (2k-1)\pi$  において、

$$(2k-2)\pi \sin \theta \leq \theta \sin \theta \leq (2k-1)\pi \sin \theta$$

であるから、

$$(2k-2)\pi \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \sin \theta \, d\theta < \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta \sin \theta \, d\theta < (2k-1)\pi \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \sin \theta \, d\theta$$

$$4(k-1)\pi < \int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta \sin \theta \, d\theta < 2(2k-1)\pi$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 4(k-1)\pi < S_n < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 2(2k-1)\pi$$

$$\frac{4\pi}{n^2} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n < S_n < \frac{2\pi}{n^2} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \right\} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{n^2} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = 2\pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n^2} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \right\} = 2\pi$$

であるから、 $\textcircled{1}$  ではさみうちの原理により  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2\pi$ 。

【別解】(\*)からの計算

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta \sin \theta \, d\theta.$$

ここで

$$\int \theta \sin \theta \, d\theta = \theta \cdot (-\cos \theta) - \int 1 \cdot (-\cos \theta) \, d\theta$$

$$= -\theta \cos \theta + \sin \theta + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるので

$$\begin{aligned} \int_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} \theta \sin \theta \, d\theta &= \left[ -\theta \cos \theta + \sin \theta \right]_{2(k-1)\pi}^{(2k-1)\pi} \\ &= -(2k-1)\pi \cdot (-1) + 2(k-1)\pi \cdot 1 \\ &= (4k-3)\pi. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (4k-3)\pi \\ &= \frac{1}{n^2} \left\{ 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n \right\} \pi \\ &= \left( 2 - \frac{1}{n} \right) \pi \end{aligned}$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2\pi.$$

2

たて、横、高さがそれぞれ  $x, y, z$  であるような直方体がある。

$$x + y + z = a, \text{ 表面積が } \frac{a^2}{2}$$

を満たすとき、体積  $V$  の最大値を求めよ。

条件より、

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2(xy + yz + zx) = \frac{a^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = \frac{a^2}{4} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、体積  $V$  は、

$$V = xyz. \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より、 $t = x, y, z$  を解に持つ  $t$  の 3 次方程式を作ると、

$$(t-x)(t-y)(t-z) = 0.$$

$$\iff t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = 0.$$

$$\iff t^3 - at^2 + \frac{a^2}{4}t = V. \quad \dots \textcircled{3}$$

③ が正の実数解を 3 つ持つような  $V$  の条件を求める。

$$f(t) = t^3 - at^2 + \frac{a^2}{4}t$$

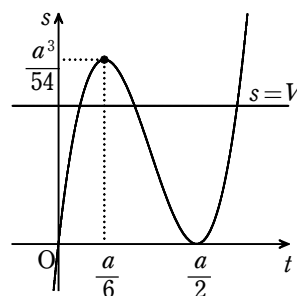
とおくとき、③ の正の実数解は、 $s = f(t)$  のグラフと、直線

$s = V$  との共有点の  $t$  座標に等しい。

$$f'(t) = 3t^2 - 2at + \frac{a^2}{4} = 3\left(t - \frac{a}{6}\right)\left(t - \frac{a}{2}\right).$$

したがって、増減表は以下ようになる。

$t$	...	$\frac{a}{6}$	...	$\frac{a}{2}$	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	$\frac{a^3}{54}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



グラフより、 $s = f(t)$  と  $s = V$  の共有点から、正の実数解が 3 つ存在する条件は、 $0 < V \leq \frac{a^3}{54}$ .

したがって、求める  $V$  の最大値は  $\frac{a^3}{54}$ .

【別解】 ②からの計算

ここで、①より  $y+z=a-x$ ,  $yz=\frac{a^2}{4}-(y+z)x=\frac{a^2}{4}-ax+x^2$  であるので、②に代入して

$$V=x\left(\frac{a^2}{4}-ax+x^2\right)=x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x$$

また、 $y, z$  は  $u$  の 2 次方程式  $u^2-(a-x)u+\frac{a^2}{4}-ax+x^2=0$  の正の 2 実数解であるので、判別式を  $D$  とすると

$$D \geq 0, \quad y+z > 0, \quad yz > 0$$

$$\therefore 0 < x \leq \frac{2}{3}a, \quad x \neq \frac{a}{2}$$

このとき

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}(6x-a)(2x-a)$$

より、増減表は次のようになる.

$x$	(0)		$\frac{a}{6}$		$\left(\frac{a}{2}\right)$		$\frac{2}{3}a$
$\frac{dV}{dx}$		+	0	-		+	
$V$	(0)	↗	$\frac{a^3}{54}$	↘	(0)	↗	$\frac{a^3}{54}$

よって、求める  $V$  の最大値は  $\frac{a^3}{54}$ .

3

$$\sum_{k=1}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

【解説】

$$k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = f(k+1) - f(k)$$

とおけば、

$$\sum_{k=1}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\} = f(n+1) - f(1)$$

と求まる。ここで、

$$f(k) = (pk^2 + qk + r) \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f(k+1) &= \{p(k+1)^2 + q(k+1) + r\} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \left\{ \frac{p}{2}k^2 + \left(p + \frac{q}{2}\right)k + \frac{p+q+r}{2} \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

$$f(k+1) - f(k) = \left\{ -\frac{p}{2}k^2 + \left(p - \frac{q}{2}\right)k + \frac{p+q-r}{2} \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

これが  $k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$  と一致するので、

$$-\frac{p}{2} = 1, \quad p - \frac{q}{2} = 0, \quad \frac{p+q-r}{2} = 0$$

$$\iff (p, q, r) = (-2, -4, -6)$$

したがって、求める和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k &= f(n+1) - f(1) \\ &= \{-2(n+1)^2 - 4(n+1) - 6\} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (-6) \\ &= 6 - (n^2 + 4n + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

【別解】

$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$  とおく.

$$S_n = 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} S_n = 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (n-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

① - ② より

$$\frac{1}{2} S_n = 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (2n-3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{1}{4} S_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (2n-5) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (2n-3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \quad \dots \textcircled{4}$$

③ - ④ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S_n &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\ &= \frac{1}{2} + 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{3}{2} - \left(\frac{n^2}{4} + n + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

よって

$$S_n = 6 - (n^2 + 4n + 6) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4

$2^{n+1} \geq n^3$  を満たす自然数  $n$  をすべて求めよ.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$2^{n+1}$	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...
$n^3$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	...

上表より,  $n=1, 2, n \geq 8$  であると予想できる.

以下,  $n \geq 8$  を満たすすべての自然数  $n$  について

$$2^{n+1} \geq n^3 \quad \dots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す.

i)  $n=8$  のとき

(\* の左辺) =  $2^9 = 512$ , (\* の右辺) =  $8^3 = 512$  となり, (\*) は成立する.

ii)  $n = k (k \geq 8)$  のとき

(\*) が成立すると仮定すると,  $2^{k+1} \geq k^3$

このとき,  $n = k + 1$  について

$$\begin{aligned} & 2^{k+2} - (k+1)^3 \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ &\geq 2k^3 - (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \quad (\because \text{仮定}) \\ &= k^3 - 3k^2 - 3k - 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで,  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$  ( $x$  は実数) について,

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x-1)^2 - 6$  より,  $f'(8) = 3 \cdot 7^2 - 6 > 0$  と併せて,  $f(x)$  は  $x \geq 8$  において単調に増加する.

すなわち,  $k \geq 8$  のとき,  $f(8) > 0$  より  $\textcircled{1} > 0$ .

したがって,  $n = k + 1$  のときも (\*) は成立する.

よって, 以上 i) ii) より,  $n \geq 8$  で (\*) は成立するので, 求める自然数  $n$  は

$$n = 1, 2, n \geq 8$$

**【講評】**

大問1が簡単そうに見えるが, ここをまともに取り組むと, 時間が掛かってしまい, 全体として点数が取りにくい設問になっている. 大問2と大問3が典型的な問題であり, ここをしっかりとることが一次突破の鍵となっただろう, 問題選びが重要であった.

全体として60%をとりたいところだが, 60分という時間の短さを考えると, 50%弱でも十分一次突破のチャンスはある.

**1 大的中!**



332 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} x^2 |\sin nx| dx$$

**2 3 前期テキスト第4講大的中!**



(1) 3次方程式  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  の解が  $\alpha, \beta, \gamma$  であるとき, 3つの係数  $a, b, c$  を  $\alpha, \beta, \gamma$  で表せ.

(2) 次の2条件

(ア) 縦, 横, 高さを加えると9mになる.

(イ) 表面積は48 m<sup>2</sup>である.

を満たす直方体の体積のうち最大のものを求めよ.

(1) 和  $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$  を求めよ.

(2) 和  $T_n = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot 2^k$  を求めよ.

**メルマガ無料登録で全教科配信!** 本解答速報の内容に関するお問合せは YMS ☎03-3370-0410 まで

☎ 03-3370-0410

受付時間 8~20時 土日祝可  
<https://yms.ne.jp/>  
 東京都渋谷区代々木 1-37-14



☎ 0120-146-156

携帯からOK 受付時間 9~21時 土日祝可  
<https://www.mebio.co.jp/>  
 大阪市中央区石町2-3-12ベルヴォア天満橋