医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

埼玉医科大学(前期)　数学

2020年 1月25日実施

$\boxed{1}$

問 1　a, b は $1 < b \leqq a$ を満たす実数である．$\log_a b + \log_b a = \dfrac{9}{2}$ のとき，

$$\log_a b = \frac{\boxed{\ 1\ } - \sqrt{\boxed{\ 2\ }\boxed{\ 3\ }}}{\boxed{\ 4\ }}$$

である．

問 2　リンゴが 25 個，ミカンが 19 個，ナシが 16 個ある．これらの果物すべてを 50 人に配ったところ，リンゴだけをもらった人は 13 人，ミカンだけをもらった人は 9 人，ナシだけをもらった人は 6 人であった．リンゴ，ミカン，ナシのすべてをもらった人は最大で $\boxed{\ 5\ }$ 人であり，1 つも果物をもらえなかった人は最大で $\boxed{\ 6\ }\boxed{\ 7\ }$ 人である．ただし，同じ人が同じ種類の果物を 2 個以上もらうことはできないものとする．

問 3　4 辺のうち，3 辺の長さが a である台形の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\ 8\ }\sqrt{\boxed{\ 9\ }}}{\boxed{\ 10\ }}a^{\boxed{\ 11\ }}$ である．

解答

問 1　$\log_a b = X$ とおく，a, b は $1 < b \leqq a$ を満たすので，$0 < X \leqq 1$ である．

底を変換すると，$\log_a b + \dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{9}{2}$．したがって，

$$X + \frac{1}{X} = \frac{9}{2}$$

$$\iff 2X^2 - 9X + 1 = 0$$

$$\iff X = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{4}.$$

$0 < X \leqq 1$ より，$X = \dfrac{\mathbf{9 - \sqrt{65}}}{\mathbf{4}}$.

問 2　リンゴ，ミカン，ナシを持っているという事象をそれぞれ A, B, C とおく．同じ人が同じ種類の果物を 2 個以上もらうことができないので，条件から，

$$n(U) = 50,\ n(A) = 25,\ n(B) = 19,\ n(C) = 16,$$

$$n(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 13,\ n(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) = 9,\ n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 6.$$

ここで，リンゴ，ミカン，ナシをすべてもらった人が x 人，1 つも果物をもらえなかった人が y 人いたとする．式で表すと

$$n(A \cap B \cap C) = x,\ n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = y.$$

このとき,

$$
\begin{aligned}
n(\overline{B}\cap\overline{C}) &= n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \\
&= 13+y. \\
n(\overline{B}\cap C) &= n(\overline{B})-n(\overline{B}\cap\overline{C}) \\
&= n(U)-n(B)-n(\overline{B}\cap\overline{C}) \\
&= 50-19-(13+y) \\
&= 18-y. \\
n(A\cap\overline{B}\cap C) &= n(\overline{B}\cap C)-n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C) \\
&= (18-y)-6 \\
&= 12-y. \\
n(A\cap B\cap\overline{C}) &= n(A)-n(A\cap B\cap C)-n(A\cap\overline{B}\cap C)-n(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \\
&= 25-x-(12-y)-13 \\
&= y-x. \\
n(B\cap\overline{C}) &= n(A\cap B\cap\overline{C})+n(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}) \\
&= (y-x)+9 \\
&= y-x+9. \\
n(B\cap C) &= n(B)-n(B\cap\overline{C}) \\
&= 19-(y-x+9) \\
&= 10+x-y. \\
n(\overline{A}\cap B\cap C) &= n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C) \\
&= (10+x-y)-x \\
&= 10-y.
\end{aligned}
$$

また, $n(C)=n(B\cap C)+n(\overline{B}\cap C)$ であるから,

$$
16=(10+x-y)+(18-y)\iff 12+x-2y=0.
$$

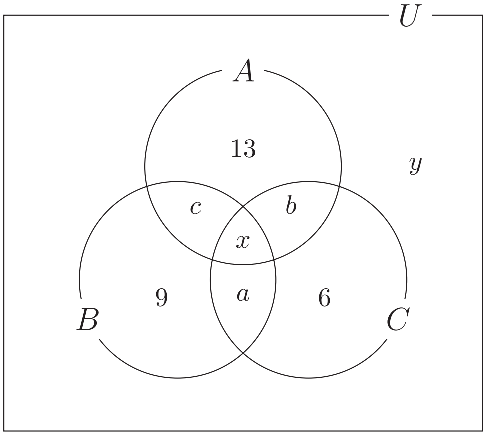
求めたそれぞれの要素の個数が 0 以上であることを考えて式を整理する．$x=2y-12$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
13+y \geqq 0 &\iff y \geqq -13. \\
18-y \geqq 0 &\iff y \leqq 18. \\
12-y \geqq 0 &\iff y \leqq 12. \\
y-x \geqq 0 &\iff y-(2y-12) \geqq 0 \\
&\iff y \leqq 12. \\
y-x+9 \geqq 0 &\iff y-(2y-12)+9 \geqq 0 \\
&\iff y \leqq 21. \\
10+x-y \geqq 0 &\iff 10+(2y-12)-y \geqq 0 \\
&\iff y \geqq 2. \\
10-y \geqq 0 &\iff y \leqq 10.
\end{aligned}$$

したがって，$2 \leqq y \leqq 10$ であるから y の最大値は 10 である．
また，$x=2y-12$ より $x \geqq 0$ と併せて，$0 \leqq x \leqq 8$，x の最大値は 8 である．
リンゴ，ミカン，ナシのすべてをもらった人は最大で **8** 人，1 つも果物をもらえなかった人は最大で **10** 人である．

別解

記号は同じものとする．
$n(\overline{A} \cap B \cap C)=a$，$n(A \cap \overline{B} \cap C)=b$，$n(A \cap B \cap \overline{C})=c$ とおく．ベン図は次のようになる．



このときそれぞれの果物をもたった人の数に注目すると，次の式が得られる．

$$\begin{cases} x+b+c+13=25 & (\text{リンゴ}) \\ x+c+a+9=19 & (\text{ミカン}) \\ x+a+b+6=16 & (\text{ナシ}) \end{cases}$$

変形して

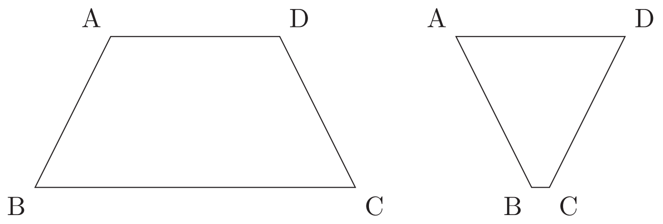
$$\begin{cases} x+b+c=12 & (\text{リンゴ}) \\ x+c+a=10 & (\text{ミカン}) \\ x+a+b=10 & (\text{ナシ}) \end{cases}$$

ミカンとナシの式から $b=c$，リンゴとミカンの式から $b=a+2$ が得られる．こうして $x+2a=8$ を得る．
全員で 50 人いたことから

$$\begin{aligned} 50 &= x+a+b+c+13+9+6+y \\ &= x+y+3a+32. \end{aligned}$$

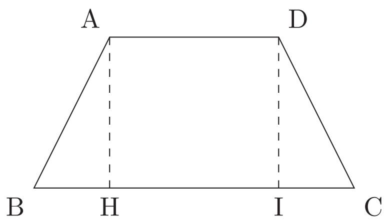
$x = 8 - 2a$ を代入してまとめると，$y + a = 10$ を得る．
$a \geqq 0$ であることから x の最大値は $\mathbf{8}$，y の最大値は $\mathbf{10}$.

問 3　4 辺のうち，3 辺の長さが等しい台形は等脚台形である．図のように $\mathrm{AB} = \mathrm{AD} = \mathrm{CD} = a$ とする．



面積が最大となるのは $\mathrm{AD} < \mathrm{BC}$ のときに現れる．このとき，$\angle\mathrm{ABC} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．また，点 A，D から辺 BC に下した垂線の足を H，I とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{BH} &= \mathrm{CI}\\ &= \mathrm{AB}\cos\theta\\ &= a\cos\theta,\\ \mathrm{AH} &= \mathrm{AB}\sin\theta\\ &= a\sin\theta,\\ \mathrm{BC} &= \mathrm{BH} + \mathrm{HI} + \mathrm{IC}\\ &= a(2\cos\theta + 1).\end{aligned}$$



したがって，求める面積 $S(\theta)$ は，

$$\begin{aligned}S(\theta) &= \frac{1}{2}(\mathrm{AD} + \mathrm{BC}) \cdot \mathrm{AH}\\ &= \frac{1}{2}\{a + a(2\cos\theta + 1)\} \cdot a\sin\theta\\ &= a^2\sin\theta(1 + \cos\theta).\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}S'(\theta) &= a^2\{\cos\theta(1 + \cos\theta) + \sin\theta(-\sin\theta)\}\\ &= a^2(\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)\\ &= a^2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)\\ &= a^2(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)\end{aligned}$$

となる．よって増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	$\searrow$	

増減表から $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2}$ をとることがわかる．

$\boxed{\text{別解}}$

最大値は次のように求めることもできる．

$$\begin{aligned}\{S(\theta)\}^2&=a^4\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2\\&=a^4(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)^2\\&=a^4(1+\cos\theta)^3(1-\cos\theta).\end{aligned}$$

$1+\cos\theta>0$，$1-\cos\theta>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より，

$$\begin{aligned}&\frac{\dfrac{1+\cos\theta}{3}+\dfrac{1+\cos\theta}{3}+\dfrac{1+\cos\theta}{3}+(1-\cos\theta)}{4}\geqq\sqrt[4]{\frac{(1+\cos\theta)^3(1-\cos\theta)}{27}}.\\&\iff\frac{1}{2}\geqq\sqrt[4]{\frac{\{S(\theta)\}^2}{27a^4}}\\&\iff\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\geqq S(\theta)\end{aligned}$$

等号成立は，$\dfrac{1+\cos\theta}{3}=1-\cos\theta$ のとき．整理して $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき．

したがって，$S(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2}$ をとる．

$\boxed{2}$ 以下の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ.

$a > 0$ として，曲線 $y = ax^2 - \dfrac{1}{a}$ を考える.

問 1　曲線上の点で原点 O に最も近い点のうち，x 座標が正のものを点 P とすると，P の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{12}}}{\boxed{13}\,a},\ -\frac{\boxed{14}}{\boxed{15}\,a} \right)$$

である.

問 2　OP $= 1$ のとき，$a = \dfrac{\sqrt{\boxed{16}}}{\boxed{17}}$ である.

問 3　a が問 2 で求めた値のとき，曲線と OP を通る直線で囲まれた図形を y 軸周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{\boxed{18}\ \boxed{19}\sqrt{\boxed{20}}}{\boxed{21}\ \boxed{22}}\pi$$

である.

$\boxed{\text{解答}}$

問 1　曲線 $y = ax^2 - \dfrac{1}{a}$ 上の点 R$\left(t,\ at^2 - \dfrac{1}{a}\right)$ と原点 O との距離が最小値となるときの t の値を求める.

$$\begin{aligned} \mathrm{OR}^2 &= t^2 + \left(at^2 - \frac{1}{a}\right)^2 \\ &= a^2t^4 - t^2 + \frac{1}{a^2} \\ &= a^2\left(t^2 - \frac{1}{2a^2}\right)^2 + \frac{3}{4a^2}. \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

よって，OR が最小となるのは $t^2 = \dfrac{1}{2a^2}$，つまり，$t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}a}$ のときである.

ここで，点 P の x 座標が正であることから，$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}a}$ のときの点 R が点 P である.

よって P$\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2a}},\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{2a}}\right)$.

問 2　① より $\mathrm{OP}^2 = \dfrac{3}{4a^2}$ である．OP $= 1$ であるから $a^2 = \dfrac{3}{4}$.

$a > 0$ より $a = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

問 3　$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から

曲線：$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，直線 OP：$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

直線 OP と曲線との交点の座標を求める.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$$
$$\Longleftrightarrow 3\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{2}x - 4\sqrt{3} = 0$$

これを解くと $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$.

ここで直線 OP と曲線の交点で点 P でない方の点を Q とすると $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{6},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

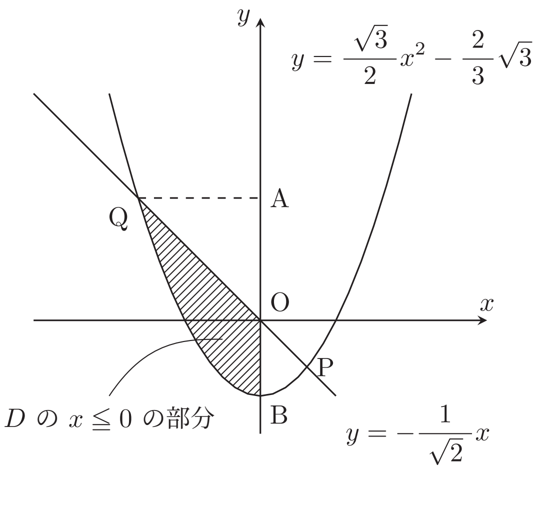
また，図のように点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ をとる.

直線 OP と曲線：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ で囲まれる部分（D とする）を y 軸周りに回転してできる立体は，D の $x\leqq 0$ の部分を y 軸の周りに回転してできる立体である.

曲線 BQ と線分 QA と線分 AB で囲まれた部分を y 軸周りに回転してできる立体の体積を V_1，△OQA を y 軸の周りに回転してできる立体（直円錐）の立体を V_2 とすると

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}} \pi x^2 dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\int_{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}\left(y+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)dy \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\pi\int_{0}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}\frac{2}{3}\sqrt{3}dy \\
&= \frac{8}{3}\pi\Big[y\Big]_0^{\frac{2}{3}\sqrt{3}} \\
&= \frac{16}{9}\sqrt{3}\pi \\
V_2 &= \pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{16}{27}\sqrt{3}\pi
\end{aligned}
$$

よって，$V_1-V_2=\boldsymbol{\dfrac{32}{27}\sqrt{3}\pi}$



$\boxed{3}$ 以下の文章を読み，下の問い (問 1〜3) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

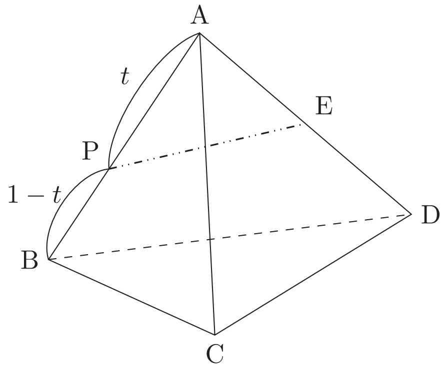
1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD がある．AD の中点を E，AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P とする．ただし，$0 \leqq t \leqq 1$ であるものとする．

問 1　三角形 CEP の面積を $S(t)$ で表すと，$S(1) = \dfrac{\sqrt{\boxed{23}}}{\boxed{24}}$ である．

問 2　任意の t に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} = \dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}}(\boxed{27} - \boxed{28}\,t)$ であり，$\mathrm{CP}^2 = \boxed{29}\,t^2 - \boxed{30}\,t + \boxed{31}$ である．

問 3　$S(t)$ は $t = \dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}\,\boxed{34}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{35}\,\boxed{36}}}{\boxed{37}\,\boxed{38}}$ をとる．

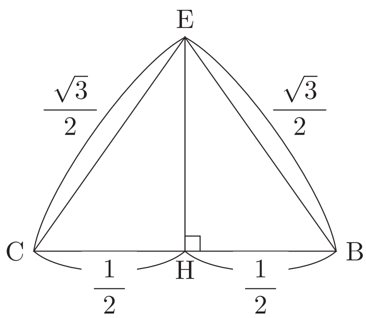
解答



問 1　$t = 1$ のとき，点 P は頂点 B と一致するので，$S(1) = (\triangle\mathrm{CEB}\text{ の面積})$ である。点 E から辺 BC に下した垂線の足を H とすると，三平方の定理より

$$\mathrm{EH} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

よって $S(1) = 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$.



問 2　$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{d}$ とすると，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \cdots\cdots②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}} &= \frac{1}{2}\{(1-t)|\overrightarrow{a}|^2+t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+(1-t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}+t\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(3-t)}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= (1-t)^2|\overrightarrow{a}|^2+2t(1-t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2|\overrightarrow{b}|^2\\ &= \boldsymbol{t^2-t+1}.\end{aligned}$$

問 3

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}})^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(t^2-t+1)\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{16}(3-t)^2}\\ &= \frac{1}{8}\sqrt{11t^2-6t+3}\\ &= \frac{1}{8}\sqrt{11\left(t-\frac{3}{11}\right)^2+\frac{24}{11}}.\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq 1$ より，$S(t)$ は $t=\dfrac{3}{11}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{66}}{44}}$ となる.

$\boxed{4}$ 以下の文章を読み，下の問い (問 1〜2) の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

1 組 52 枚のトランプを模様（スペード，ハート，クローバー，ダイヤ）ごとに 4 つの束に分け，それぞれ束から 1 枚ずつ無作為に引く．そして，スペードの束から引いたカードの数字を a，ハートの束から引いたカードの数字を b，クローバーから引いたカードの数字を c，ダイヤの束から引いたカードの数字を d とする．

ただし，J（ジャック）は 11，Q（クイーン）は 12，K（キング）は 13 であるものとする．

問 1　$a+b+c=6$ となる確率は $\dfrac{\boxed{39}\,\boxed{40}}{\boxed{41}\,\boxed{42}\,\boxed{43}\,\boxed{44}}$ である．このとき，積 abc の最大値は $\boxed{45}$ であり，最小値は $\boxed{46}$ である．

問 2　$a+b+c+d=8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{47}\,\boxed{48}}{\boxed{49}\,\boxed{50}\,\boxed{51}\,\boxed{52}\,\boxed{53}}$ である．また，$a+b+c+d=8$ であるとき，積 $abcd$ が最小となる確率は $\dfrac{\boxed{54}}{\boxed{55}\,\boxed{56}}$ である．

解答

題意より $1 \leqq a \leqq 13$，$1 \leqq b \leqq 13$，$1 \leqq c \leqq 13$，$1 \leqq d \leqq 13$　$\cdots\cdots$①

問 1　$a+b+c=6$ となる自然数 $(a,\ b,\ c)$ の組み合わせは全部で ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通りある（すべて ① をみたす）．

10 通りそれぞれが起きる確率は等しいことから，$a+b+c=6$ となる確率は $\dfrac{10}{({}_{13}\mathrm{C}_1)^3} = \dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{2197}}$．

次に，abc の最大値と最小値について，$a \leqq b \leqq c$ としても一般性は失われない．

$a \leqq b \leqq c$ かつ $a+b+c=6$ となる $(a,\ b,\ c)$ は

$$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2).$$

である．

よって，abc のとることができる値は 4，6，8 であることから abc の最大値は **8**，最小値は **4** となる．

問 2　$a+b+c+d=8$ となる自然数 $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組み合わせは全部で ${}_7\mathrm{C}_3 = 35$ 通りある（すべて ① をみたす）．

35 通りそれぞれが起きる確率は等しいことから，$a+b+c+d=8$ となる確率は $\dfrac{35}{({}_{13}\mathrm{C}_1)^4} = \dfrac{\mathbf{35}}{\mathbf{28561}}$．

さらに，このとき，$abcd$ が最小になるときを考える．$a \leqq b \leqq c \leqq d$ としても一般性は失われない．

$a \leqq b \leqq c \leqq d$ かつ $a+b+c+d=8$ となる $(a,\ b,\ c,\ d)$ は，

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 3,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2,\ 2).$$

したがって，$abcd$ のとり得る値は 5，8，9，12，16 であることから，$abcd$ の最小値は 5．

よって $(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 1,\ 5,\ 1),\ (1,\ 5,\ 1,\ 1),\ (5,\ 1,\ 1,\ 1)$ の 4 通りのときに，$abcd$ が最小となる．$a+b+c+d=8$ であるとき，積 $abcd$ が最小になる条件付き確率は，

$$\frac{\dfrac{4}{28561}}{\dfrac{35}{29561}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{35}}.$$

講評

昨年度と比較すると難化した．大問 1 の (2) と (3) で動揺した受験生も多かったのではないか．大問 2 と大問 3 も後半は計算量が多く．手際よくこなしていかないと高得点は取れない．その中でも，大問 4 が完答しやすかったと考えられる．60 分という短い試験時間と計算量などを考えると，一次突破ラインは 65 %程度と考えられる．