

昭和大学医学部(1期) 数学

2020年1月24日実施

- 1 次の問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。 i は虚数単位とする。
- 座標平面において、原点を O とする。座標平面上の点 $A(x, y)$ を複素数 $A(z)$ (ただし $z = x + iy$) に移す操作を X とする。また、複素数 $A(z')$ (ただし $z' = x' + iy'$) を座標平面上の点 $A'(x', y')$ に移す操作を Y とする。
- (1) 座標平面上の原点, および2点 $B\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)$, $C(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ からなる三角形を $\triangle OBC$ とする。 \overrightarrow{OB} と \overrightarrow{OC} がなす角をラジアン単位で求めよ。また、 $\triangle OBC$ の面積を求めよ。
- (2) BC の中点を M とする。操作 X によって B, C, M から複素数 β, γ, μ が得られたとき、 β, γ, μ を複素数平面の原点周りに $-\frac{\pi}{4}$ 回転させて得られる複素数 β', γ', μ' を求めよ。
- (3) β', γ', μ' を操作 Y によって座標平面に移した点を B', C', M' とする。 x 軸と OM' がなす小さい方の角を θ とするとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値をそれぞれ求めよ。
- (4) 操作 X と Y を組み合わせて $\triangle OBC$ を原点 O まわりに回転させるとする。 $\triangle OBC$ の面積が y 軸で二等分されるとき、 B に対応する点を B'' , C に対応する点を C'' とした場合、 $B''C''$ を通る直線の方程式を求めよ。

【解説】

- (1) 条件から $B(2\cos 15^\circ, 2\sin 15^\circ)$, $C(4\cos 75^\circ, 4\sin 75^\circ)$ である。したがって、 \overrightarrow{OB} と \overrightarrow{OC} のなす角は、 $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ 。

また、 $OB=2$, $OC=4$ なので、

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

- (2) $\beta = 2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$, $\gamma = 4(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$ なので、これを原点周りに -45° 回転すると、

$$\beta' = 2\left\{\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)\right\} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i.$$

$$\gamma' = 4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

このとき、 M が線分 BC の中点なので

$$\mu' = \frac{\beta' + \gamma'}{2} = \frac{(\sqrt{3} - i) + (2\sqrt{3} + 2i)}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

- (3) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

であるから、 x 軸とのなす角を θ とすると、

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{7}}{14}, \quad \cos \theta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

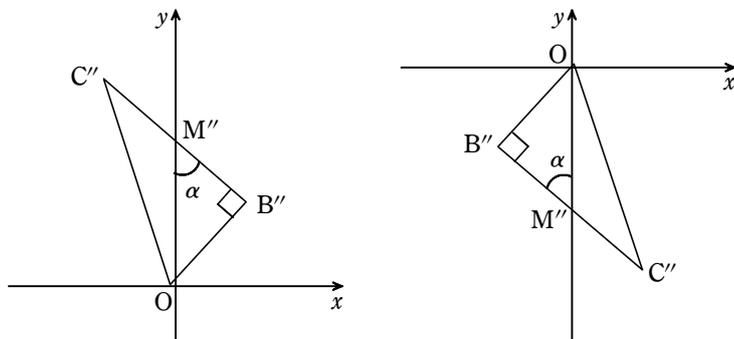
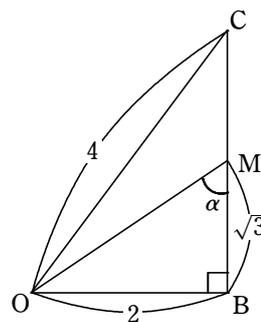
(4) $\triangle OBC$ は $OB=2$, $OC=4$, $\angle BOC=60^\circ$ なので, $\angle OBC=90^\circ$ の直角三角形である.

図のように $\angle OMB=\alpha$ とおけば,

$$\tan \alpha = \frac{OB}{BM} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$OM = \sqrt{OB^2 + BM^2} = \sqrt{7}.$$

また, 線分 $B''C''$ の中点 M'' が y 軸上にあるときに $\triangle OB''C''$ の面積が y 軸で二等分されるので, 回転後は下の図となる.



$OM'' = \sqrt{7}$ であり, 直線 $B''C''$ の傾きは,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって,

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{7} \quad \text{または} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{7}.$$

【4の別解】

(4) $M''(0, \sqrt{7})$ のときを考える。

$B''(a, b)$ とおくと, $OB''=2$, $B''M''=\sqrt{3}$ より

$$a^2 + b^2 = 4, \quad a^2 + (b - \sqrt{7})^2 = 3.$$

$a > 0$ に注意して, これを解くと, $(a, b) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \frac{4}{\sqrt{7}}\right)$.

したがって, $B''\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \frac{4}{\sqrt{7}}\right)$, $M''(0, \sqrt{7})$ より, この2点を通る直線の方程式を求めて

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{7}.$$

よって, $M''(0, -\sqrt{7})$ のときも考えて

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{7} \quad \text{または} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{7}.$$

※ B'' の座標は, $B''(2\cos \alpha, 2\sin \alpha)$ を計算してもよい.

2 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) (廃問になりました)

(2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $(2n+1)a_n = (2n-3)a_{n-1}$ ($n \geq 2$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(3) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{8}a_n$$

【解説】

(2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $(2n+1)a_n = (2n-3)a_{n-1}$ ($n \geq 2$).

両辺に $(2n-1)$ を掛けて、 $(2n+1)(2n-1)a_n = b_n$ とおけば、

$$(2n+1)(2n-1)a_n = (2n-1)(2n-3)a_{n-1}.$$

$$b_n = b_{n-1}.$$

数列 $\{b_n\}$ は定数列であり、 $b_1 = 3 \cdot 1 \cdot a_1 = 1$. よって、

$$b_n = 1.$$

$$a_n = \frac{b_n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}.$$

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

(3) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{8}a_n$.

変形すると、

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

と表せる。ただし、 α, β は方程式 $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$ の解。すなわち、 $\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$, $\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

このとき、数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は初項 $a_2 - \alpha a_1 = \frac{1}{2} - \alpha = \beta$, 公比 β の等比数列なので、

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta \cdot \beta^{n-1} = \beta^n. \quad \dots \textcircled{1}$$

また、数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は初項 $a_2 - \beta a_1 = \frac{1}{2} - \beta = \alpha$, 公比 α の等比数列なので、

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^n. \quad \dots \textcircled{2}$$

①-②より

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^n - \alpha^n \iff a_n = \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta^n - \alpha^n)$$

よって、

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} \right)^n \right\}.$$

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

【(2)の別解】

$n \geq 2$ のとき、与式より

$$a_n = \frac{2n-3}{2n+1} a_{n-1}$$

繰り返し用いて

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2n-3}{2n+1} a_{n-1} \\ &= \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1} a_{n-2} = \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{2n-5}{2n-1} \cdots \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} a_1 \\ &= \frac{3 \cdot 1}{(2n+1)(2n-1)} a_1 \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}. \quad (\because a_1 = \frac{1}{3})\end{aligned}$$

$n=1$ とすると, $\frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3} = a_1$ となり, このときも成立する.

よって

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ について

(1-1) 焦点の座標を求めよ。

(1-2) 漸近線の方程式を求めよ。

(2) 2つの袋 A, B がある。A には赤球 4 個、白球 3 個、B には赤球 3 個、白球 4 個が入っている。ただし、(2-1) のあとも (2-2) のあとも、それぞれの球は元の状態に戻すものとする。

(2-1) A から球を 1 個取り出して B に入れ、次に B から球を 1 個取り出したとき、それが赤球である確率を求めよ。

(2-2) A から球を 1 個取り出して B に入れ、B から球を 1 個取り出す。さらに A から球を 1 個取り出して B に入れ、B から球を 1 個取り出す。このとき、B から取り出した球 2 個がともに赤球である確率を求めよ。

(2-3) A から球を 2 個取り出して B に入れ、次に B から球を 2 個取り出す。このとき、B から取り出した球 2 個がともに赤球である確率を求めよ。

【解説】

(1)

(1-1) $(0, \pm\sqrt{9+16}) \quad \therefore (0, \pm 5)$.

(1-2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0$ より、 $y = \pm \frac{4}{3}x$.

(2)

(2-1) A から取り出した球の色で場合分けをする。

(i) 最初に A から取り出した球が赤球のとき、B は赤球 4 個、白球 4 個となるので、 $\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8}$.

(ii) 最初に A から取り出した球が白球のとき、B は赤球 3 個、白球 5 個となるので、 $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8}$.

これらは互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{25}{56}.$$

(2-2) (2-1) と同様に考えて、B から取り出した球 2 個がともに赤球となるのは、

赤 → 赤 → 赤 → 赤、赤 → 赤 → 白 → 赤、白 → 赤 → 赤 → 赤、白 → 赤 → 白 → 赤
の順に取り出すときである。

これらは互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{8} = \frac{5}{28}.$$

(2-3) A から取り出した球の組み合わせで場合分けをする。

(i) 最初に A から取り出した球が赤球 2 個のとき、B は赤球 5 個、白球 4 個となるので、 $\frac{4C_2}{7C_2} \cdot \frac{5C_2}{9C_2}$.

(ii) 最初に A から取り出した球が白球 2 個のとき、B は赤球 3 個、白球 6 個となるので、 $\frac{3C_2}{7C_2} \cdot \frac{3C_2}{9C_2}$.

(iii) 最初に A から取り出した球が赤球 1 白球 1 個のとき、B は赤球 4 個、白球 5 個となるので、 $\frac{4C_1 \cdot 3C_1}{7C_2} \cdot \frac{4C_2}{9C_2}$.

これらは互いに排反であるから、求める確率は、

$$\frac{4C_2}{7C_2} \cdot \frac{5C_2}{9C_2} + \frac{3C_2}{7C_2} \cdot \frac{3C_2}{9C_2} + \frac{4C_1 \cdot 3C_1}{7C_2} \cdot \frac{4C_2}{9C_2} = \frac{6 \cdot 10 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 6}{21 \cdot 36} = \frac{47}{252}.$$

4 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $y = \log_3(5x - 7)$ を微分せよ。

(2) 任意の自然数 n に対し、関数 $f(x)$ が

$$\int_{n-1}^n f(x) dx = n$$

を満たすとき、

$$\int_{1928}^{2020} f(x) dx$$

の値を求めよ。

(3) 2つの曲線

$$y = 2\sqrt{1 - \frac{x}{7}}$$

および

$$\sqrt{\frac{x}{7}} + \sqrt[3]{\frac{y}{2}} = 1$$

によって囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

【解説】

(1) $y = \log_3(5x - 7) = \frac{\log(5x - 7)}{\log 3}$ (底を自然対数に変換をした)

よって $y' = \frac{5}{(5x - 7)\log 3}$.

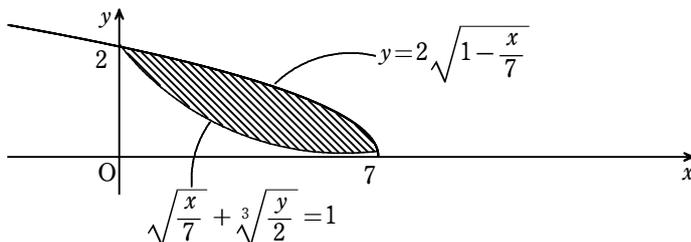
(2)
$$\int_{1928}^{2020} f(x) dx = \int_{1928}^{1929} f(x) dx + \int_{1929}^{1930} f(x) dx + \dots + \int_{2019}^{2020} f(x) dx$$

$$= \sum_{k=1929}^{2020} \int_{k-1}^k f(x) dx$$

であるから、

$$\int_{1928}^{2020} f(x) dx = \sum_{k=1929}^{2020} k = \frac{1929 + 2020}{2} \cdot 92 = 181654.$$

(3) 2つの曲線で囲まれた部分の概形は次のようになる。



ここで、 $\sqrt{\frac{x}{7}} + \sqrt[3]{\frac{y}{2}} = 1$ を y について解くと $y = 2\left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}}\right)^3$

求める立体の体積を V とする。

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^7 \left\{ \left(2\sqrt{1 - \frac{x}{7}}\right)^2 - 4\left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 \right\} dx \\ &= 4 \int_0^7 \left(1 - \frac{x}{7}\right) dx - 4 \int_0^7 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 dx \\ &= 4 \left[x - \frac{x^2}{14} \right]_0^7 - 4 \int_0^7 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 dx \\ &= 14 - 4 \int_0^7 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 dx \end{aligned}$$

$A = 4 \int_0^7 \left(1 - \sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 dx$ とする. $t = 1 - \sqrt{\frac{x}{7}}$ とおけば,

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{14} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{7}}} = -\frac{1}{14} \cdot \frac{1}{1-t}$$

$$\therefore dx = -14(1-t)dt.$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } A &= 56 \int_0^1 t^6(1-t)dt = 56 \int_0^1 (t^6 - t^7)dt \\ &= 56 \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^8}{8} \right]_0^1 = 56 \cdot \frac{1}{56} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{V}{\pi} = 14 - 1 = 13. \quad \therefore V = 13\pi.$$

x	$0 \rightarrow 7$
t	$1 \rightarrow 0$

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せは YMS ☎03-3370-0410 まで

☎ **03-3370-0410**

受付時間 8~20時 土日祝可

<https://yms.ne.jp/>

東京都渋谷区代々木 1-37-14



☎ **0120-146-156**

☎ 携帯からOK 受付時間 9~21時 土日祝可

<https://www.mebio.co.jp/>

大阪市中央区石町2-3-12ベルヴォア天満橋