昭和大学医学部（Ⅰ期）　数学

2020年1月24日実施

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．i は虚数単位とする．

座標平面において，原点を O とする．座標平面上の点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ を複素数 $\mathrm{A}(z)$（ただし $z=x+iy$）に移す操作を X とする．また，複素数 $\mathrm{A}(z')$（ただし $z'=x'+iy'$）を座標平面上の点 $\mathrm{A}'(x',\ y')$ に移す操作を Y とする．

(1) 座標平面上の原点，および 2 点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathrm{C}(\sqrt{6}-\sqrt{2},\ \sqrt{6}+\sqrt{2})$ からなる三角形を $\triangle\mathrm{OBC}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ がなす角をラジアン単位で求めよ．また，$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積を求めよ．

(2) BC の中点を M とする．操作 X によって B，C，M から複素数 β，γ，μ が得られたとき，β，γ，μ を複素数平面の原点周りに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転させて得られる複素数 β'，γ'，μ' を求めよ．

(3) β'，γ'，μ' を操作 Y によって座標平面に移した点を B'，C'，M' とする．x 軸と OM' がなす小さい方の角を θ とするとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 操作 X と Y を組み合わせて $\triangle\mathrm{OBC}$ を原点 O まわりに回転させるとする．$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積が y 軸で二等分されるとき，B に対応する点を B''，C に対応する点を C'' とした場合，$\mathrm{B}''\mathrm{C}''$ を通る直線の方程式を求めよ．

解答

(1) 条件から $\mathrm{B}(2\cos 15^\circ,\ 2\sin 15^\circ)$，$\mathrm{C}(4\cos 75^\circ,\ 4\sin 75^\circ)$ である．したがって $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角は，$60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$．また，$\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=4$ なので，

$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}.$$

(2) $\beta=2(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$，$\gamma=4(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)$ なので，これを原点周りに -45° 回転すると，

$$\begin{aligned}\beta'&=2\{\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)\}\\&=2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right)\\&=\sqrt{3}-i.\\\gamma'&=4(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\\&=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\&=2\sqrt{3}+2i.\end{aligned}$$

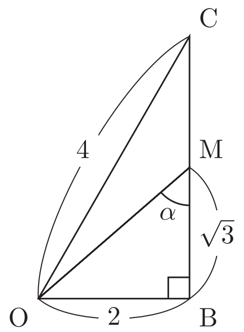
このとき，M が線分 BC の中点なので

$$
\begin{aligned}
\mu' &= \frac{\beta' + \gamma'}{2} \\
&= \frac{(\sqrt{3} - i) + (2\sqrt{3} + 2i)}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}.
\end{aligned}
$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから，x 軸とのなす角を θ とすると，

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}} \\
\cos\theta &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{21}}{14}}.
\end{aligned}
$$

(4)　$\triangle\mathrm{OBC}$ は $\mathrm{OB} = 2$，$\mathrm{OC} = 4$，$\angle\mathrm{BOC} = 60^\circ$ なので，$\angle\mathrm{OBC} = 90^\circ$ の直角三角形である．

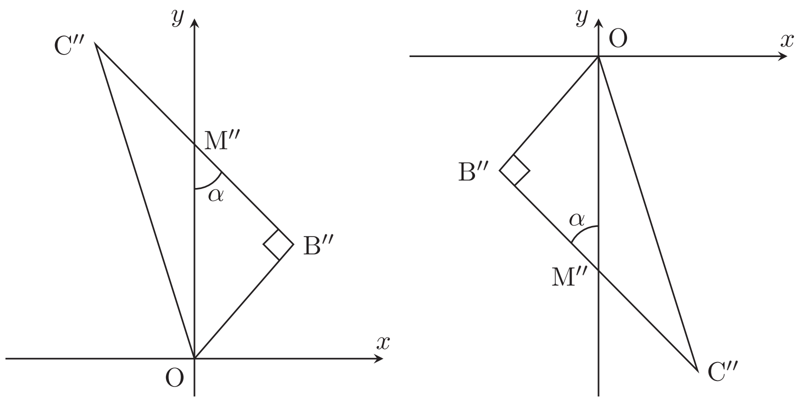


図のように $\angle\mathrm{OMB} = \alpha$ とおけば，

$$
\tan\alpha = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BM}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.
$$

$$
\mathrm{OM} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{BM}^2} = \sqrt{7}.
$$

また，線分 $\mathrm{B''C''}$ の中点 $\mathrm{M''}$ が y 軸上にあるときに $\triangle\mathrm{OB''C''}$ の面積が y 軸で二等分されるので，回転後は下の図となる．



$\mathrm{OM}'' = \sqrt{7}$ であり，直線 $\mathrm{B''C''}$ の傾きは,

$$\begin{aligned}\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\frac{1}{\tan\alpha}\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\frac{1}{\tan\alpha}\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{7}}$ または $\boldsymbol{y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{7}}$

別解

(4) $\mathrm{M}''(0,\ \sqrt{7})$ のときを考える.

$\mathrm{B}''(a,\ b)$ とおくと，$\mathrm{OB}'' = 2$，$\mathrm{B''M''} = \sqrt{3}$ より

$$a^2 + b^2 = 4,\ a^2 + (b - \sqrt{7})^2 = 3$$

$a > 0$ に注意して，これを解くと，$(a,\ b) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \frac{4}{\sqrt{7}}\right)$.

したがって，$\mathrm{B}''\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \frac{4}{\sqrt{7}}\right)$，$\mathrm{M}''(0,\ \sqrt{7})$ より，この 2 点を通る直線の方程式を求めると

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{7}.$$

よって，$\mathrm{M}''(0,\ \sqrt{7})$ のときも考えて $\boldsymbol{y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{7}}$ または $\boldsymbol{y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{7}}$.

※ B'' の座標は $\mathrm{B}''(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ を計算してもよい.

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) （廃問になりました）

(2) $a_1=\dfrac{1}{3}$，$(2n+1)a_n=(2n-3)a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{8}a_n$$

$\boxed{\text{解答}}$

(1) （廃問になりました）

(2) $a_1=\dfrac{1}{3}$，$(2n+1)a_n=(2n-3)a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$.

両辺に $(2n-1)$ を掛けて，$(2n+1)(2n-1)a_n=b_n$ とおけば，

$$(2n+1)(2n-1)a_n=(2n-1)(2n-3)a_{n-1}.$$
$$b_n=b_{n-1}.$$

数列 $\{b_n\}$ は定数列であり，$b_1=3\cdot 1\cdot a_1=1$．よって，

$$b_n=1.$$
$$a_n=\frac{b_n}{(2n+1)(2n-1)}=\boldsymbol{\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}}$$

また，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\mathbf{0}.$$

$\boxed{\text{別解}}$

$n \geqq 2$ のとき，与式より

$$a_n=\frac{(2n-3)}{(2n+1)}a_{n-1}$$

繰り返し用いて

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1}\\&=\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}a_{n-2}\\&=\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}a_1\\&=\frac{3\cdot 1}{(2n+1)(2n-1)}a_1\\&=\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}.\quad\left(\because\quad a_1=\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

$n=1$ とすると，$\dfrac{1}{3\cdot 1}=\dfrac{1}{3}=a_1$ となり，このときも成立する．

よって

$$a_n=\boldsymbol{\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}},\ \lim_{n\to\infty} a_n=\mathbf{0}.$$

(3)　$a_1 = 1$，$a_2 = \dfrac{1}{2}$，$a_{n+2} = \dfrac{1}{2}a_{n+1} + \dfrac{1}{8}a_n$ を変形すると，

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

と表される．ただし，α，β は方程式 $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8} = 0$ の解．すなわち，$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$，$\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.
このとき，数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は初項 $a_2 - \alpha a_1 = \dfrac{1}{2} - \alpha = \beta$，公比 β の等比数列なので，

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta \cdot \beta^{n-1} = \beta^n. \quad \cdots\cdots①$$

また，数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は初項 $a_2 - \beta a_1 = \dfrac{1}{2} - \beta = \alpha$，公比 α の等比数列なので，

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^n. \quad \cdots\cdots②$$

① − ② より

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^n - \alpha^n \Longrightarrow a_n = \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta^n - \alpha^n)$$

よって，

$$a_n = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^n\right\}}.$$

また，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}.$$

$\boxed{3}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=-1$ について

(1-1) 焦点の座標を求めよ．

(1-2) 漸近線の方程式を求めよ．

(2) 2 つの袋 A，B がある．A には赤球 4 個，白球 3 個，B には赤球 3 個，白球 4 個が入っている．ただし，(2-1) のあとも (2-2) のあとも，それぞれの球は元の状態に戻すものとする．

(2-1) A から球を 1 個取り出して B に入れ，次に B から球を 1 個取り出したとき，それが赤球である確率を求めよ．

(2-2) A から球を 1 個取り出して B に入れ，B から球を 1 個取り出す．さらに A から球を 1 個取り出して B に入れ，B から球を 1 個取り出す．このとき，B から取り出した球 2 個がともに赤球である確率を求めよ．

(2-3) A から球を 2 個取り出して B に入れ，次に B から球を 2 個取り出す．このとき，B から取り出した球 2 個がともに赤球である確率を求めよ．

解答

(1)

(1-1) $(0,\ \pm\sqrt{9+16})$ $\therefore$ $\mathbf{(0,\ \pm 5)}$.

(1-2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=0$ より，$\boldsymbol{y=\pm\dfrac{4}{3}x}$.

(2)

(2-1) A から取り出した球の色で場合分けをする．

(i) 最初に A から取り出した球が赤球のとき，B は赤球 4 個，白球 4 個となるので，$\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{4}{8}$.

(ii) 最初に A から取り出した球が白球のとき，B は赤球 3 個，白球 5 個となるので，$\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{8}$.

これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{8}+\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{8}=\mathbf{\frac{25}{56}}.$$

(2-2) (2-1) と同様に考えて，B から取り出した球 2 個がともに赤球となるのは，

- 赤→赤→赤→赤
- 赤→赤→白→赤
- 白→赤→赤→赤
- 白→赤→白→赤

の順に取り出すときである．

これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{8}=\mathbf{\frac{5}{28}}.$$

(2-3) A から取り出した球の組み合わせで場合分けをする．

(i) 最初に A から取り出した球が赤球 2 個のとき，B は赤球 5 個，白球 4 個となるので，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$.

(ii) 最初に A から取り出した球が白球 2 個のとき，B は赤球 3 個，白球 6 個となるので，$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$.

(iii) 最初に A から取り出した球が赤球 1 個と白球 1 個のとき，B は赤球 4 個，白球 5 個となるので，
$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$.

これらは互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}+\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{6\cdot 10+3\cdot 3+4\cdot 3\cdot 6}{21\cdot 36}=\mathbf{\frac{47}{252}}.$$

$\boxed{4}$ 次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

(1)　$y = \log_3(5x-7)$ を微分せよ．

(2)　任意の自然数 n に対し，関数 $f(x)$ が

$$\int_{n-1}^{n} f(x)dx = n$$

を満たすとき，

$$\int_{1928}^{2020} f(x)dx$$

の値を求めよ．

(3)　2 つの曲線

$$y = 2\sqrt{1-\frac{x}{7}}$$

および

$$\sqrt{\frac{x}{7}} + \sqrt[3]{\frac{y}{2}} = 1$$

によって囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

解答

(1)　底を自然対数に変換すると $y = \log_3(5x-7) = \dfrac{\log(5x-7)}{\log 3}$．

よって $y' = \boldsymbol{\dfrac{5}{(5x-7)\log 3}}$

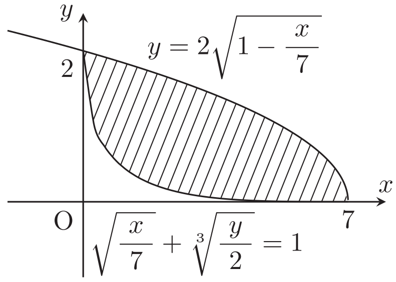
(2)

$$\begin{aligned}\int_{1928}^{2020} f(x)dx &= \int_{1928}^{1929} f(x)dx + \int_{1929}^{1930} f(x)dx + \cdots + \int_{2019}^{2020} f(x)dx \\ &= \sum_{k=1929}^{2020} \int_{k-1}^{k} f(x)dx\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_{1928}^{2020} f(x)dx &= \sum_{k=1929}^{2020} k \\ &= \frac{1929+2020}{2}\cdot 92 \\ &= \mathbf{181654}.\end{aligned}$$

(3)　2 つの曲線で囲まれた部分の概要は次のようになる．



ここで，$\sqrt{\frac{x}{7}}+\sqrt[3]{\frac{y}{2}}=1$ を y について解くと $y=2\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^3$.

求める立体の体積を V とする.

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^7 \left\{ \left(2\sqrt{1-\frac{x}{7}}\right)^2 - 4\left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 \right\} dx \\
&= 4\int_0^7 \left(1-\frac{x}{7}\right) dx - 4\int_0^7 \left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 dx \\
&= 4\Big[x-\frac{x^2}{14}\Big]_0^7 - 4\int_0^7 \left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 dx \\
&= 14 - 4\int_0^7 \left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 dx
\end{aligned}
$$

$A=4\int_0^7 \left(1-\sqrt{\frac{x}{7}}\right)^6 dx$ とする．$t=1-\sqrt{\frac{x}{7}}$ とおけば，

x	0	$\to$	7
t	1	$\to$	0

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= -\frac{1}{14}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{7}}} \\
&= -\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{1-t} \\
\therefore \quad dx &= -14(1-t)dt.
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
A &= 56\int_0^1 t^6(1-t)dt \\
&= 56\int_0^1 (t^6-t^7)dt \\
&= 56\Big[\frac{t^7}{7}-\frac{t^8}{8}\Big]_0^1 \\
&= 56\cdot\frac{1}{56} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

よって $\frac{V}{\pi}=14-1=13$. $\therefore \quad V=\mathbf{13\pi}$.

本解答速報の内容に関するお問合せは
医学部専門予備校 YMS
heart of medicine
☎ 03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木1-37-14
医学部進学予備校 メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
メルマガ登録または LINE 友だち追加で全科目を閲覧
メルマガ登録
LINE 登録