医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

東京慈恵会医科大学　数学

2020年 2月 5日実施

1． 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

袋 A には赤玉 3 個，白玉 1 個，袋 B には赤玉 1 個，白玉 3 個が入っている．「袋 A から 2 個の玉を取り出して袋 B に入れ，次に，袋 B から 2 個の玉を取り出して袋 A に入れる」という操作を繰り返す．1 回の操作の後，袋 A に白玉が 2 個以上ある確率は $\boxed{（ア）}$，2 回の操作の後，袋 A の中が白玉だけになる確率は $\boxed{（イ）}$ である．

【解説】

袋 A から玉を取り出す方法は ${}_4C_2$ 通りで同様に確からしく，袋 B から玉を取り出す方法は ${}_6C_2$ 通りで同様に確からしいものとして，以下算出する．

(ア) 1 回の操作の後，袋 A に白玉が 2 個以上あるのは

ｉ） 袋 A から赤玉 2 個取り出して袋 B に入れ，袋 B（赤玉 3 白玉 3）から白玉 2 個または赤玉 1 個，白玉 1 個取り出して袋 A に入れる … $\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_2+{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{2}{5}$.

ii） 袋 A から赤玉 1 個，白玉 1 個取り出して袋 B に入れ，袋 B（赤玉 2 白玉 4）から白玉 2 個取り出して袋 A に入れる … $\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_1C_1}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{5}$.

ときである．

よって，これらは互いに排反なので，求める確率は

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\ .$$

(イ) 袋の中の赤玉，白玉の個数がそれぞれ a , b のときの状態を（ a , b ）で表すこととする．

2 回の操作の後，袋 A の中が白玉にだけになるのは，1 回の操作の後，袋 A の中に赤玉が 2 個以下になっているときであることを考慮すると，袋の中の状態の推移は以下の 3 通りである．

	袋 A		袋 B		袋 A		袋 B		袋 A
iii）	（3 , 1）	$\xrightarrow{\text{赤2}}$	（3 , 3）	$\xrightarrow{\text{白2}}$	（1 , 3）	$\xrightarrow{\text{赤1 白1}}$	（4 , 2）	$\xrightarrow{\text{白2}}$	（0 , 4）
iv）	（3 , 1）	$\xrightarrow{\text{赤2}}$	（3 , 3）	$\xrightarrow{\text{赤1 白1}}$	（2 , 2）	$\xrightarrow{\text{赤2}}$	（4 , 2）	$\xrightarrow{\text{白2}}$	（0 , 4）
v）	（3 , 1）	$\xrightarrow{\text{赤1 白1}}$	（2 , 4）	$\xrightarrow{\text{白2}}$	（2 , 2）	$\xrightarrow{\text{赤2}}$	（4 , 2）	$\xrightarrow{\text{白2}}$	（0 , 4）

それぞれの確率を計算すると

iii） $\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\cdot\dfrac{{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_1C_1}{{}_6C_2}$

ⅳ）　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}\cdot\dfrac{{}_1C_1}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_1C_1}{{}_6C_2}$

ⅴ）　$\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_1C_1}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\cdot\dfrac{{}_1C_1}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_1C_1}{{}_6C_2}$

よって，これらは互いに排反なので，求める確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_1C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_1C_1}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_1C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_3C_1\cdot{}_1C_1}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\cdot\frac{{}_1C_1}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_1C_1}{{}_6C_2}$$

$$=\frac{27+27+18}{6\cdot15\cdot6\cdot15}=\frac{2}{225}\ .$$

２． p を2以上の自然数の定数とする．$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)$ $(x>0)$ を

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{pn}\right)$$

で定める．例えば，$p=2$ のとき

$$f_2(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)$$

$$f_3(x)=\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\left(1+\frac{x}{5}\right)\left(1+\frac{x}{6}\right)$$

である．$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ $(x>0)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $t\geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t}{1+t}\leqq\log(1+t)\leqq t$ が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) $f(x)$ を求めよ．

【解説】

(1) $t\geqq 0$ のとき，$F(t)=\log(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$，$G(t)=t-\log(1+t)$ とおく．

$$F'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{t}{(1+t)^2}\geqq 0$$

であるから，$F(t)$ は $t\geqq 0$ で単調に増加し，$F(t)\geqq F(0)=0$．

また，

$$G'(t)=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}\geqq 0$$

であるから，$G(t)$ も $t\geqq 0$ で単調に増加し，$G(t)\geqq G(0)=0$．

したがって，$t\geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t}{1+t}\leqq\log(1+t)\leqq t$ が成り立つ．

(2) $a_n=\log f_n(x)$ とおく．

$$a_n=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(1+\frac{x}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{pn}\right)=\sum_{k=n}^{np}\log\left(1+\frac{x}{k}\right).$$

(1) より，$t=\dfrac{x}{k}>0$ を用いると，

$$\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}\leqq\log\left(1+\frac{x}{k}\right)\leqq\frac{x}{k}.$$

したがって，

$$\sum_{k=n}^{np}\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}\leqq a_n\leqq\sum_{k=1}^{np}\frac{x}{k}. \quad \cdots①$$

ここで，$b_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{np}\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}$，$c_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{np}\frac{x}{k}$ とおく．

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{np}\frac{x}{k}+\frac{x}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{np}\frac{x}{\frac{k}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=\int_1^p\frac{x}{t}dt+0=x\log p. \quad \cdots②$$

また，$b_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{np}\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}=\sum_{k=n}^{np}\frac{1}{\frac{k}{x}+1}$ であり，$g(t)=\dfrac{1}{t+1}$ $(t>0)$ とおく．$g(t)$ は $t>0$ で単調減少するので，

区間 $\left[\dfrac{k}{x},\ \dfrac{k+1}{x}\right]$ において，$g(t)\leqq g\left(\dfrac{k}{x}\right)$．すなわち，

$$\int_{\frac{k}{x}}^{\frac{k+1}{x}} \frac{1}{t+1}dt < \frac{1}{x}\cdot g\left(\frac{k}{x}\right).$$

$$x\cdot\sum_{k=n}^{np}\int_{\frac{k}{x}}^{\frac{k+1}{x}} \frac{1}{t+1}dt < \sum_{k=n}^{np} g\left(\frac{k}{x}\right) = b_n. \quad \cdots③$$

ここで，③の左辺を計算すると，

$$x\cdot\sum_{k=n}^{np}\int_{\frac{k}{x}}^{\frac{k+1}{x}} \frac{1}{t+1}dt = x\cdot\int_{\frac{n}{x}}^{\frac{np+1}{x}} \frac{1}{t+1}dt = x\cdot\Big[\log|t+1|\Big]_{\frac{n}{x}}^{\frac{np+1}{x}}$$

$$= x\left\{\log\left(\frac{np+1}{x}+1\right)-\log\left(\frac{n}{x}+1\right)\right\}$$

$$= x\cdot\log\frac{\frac{np+1+x}{x}}{\frac{n+x}{x}} = x\cdot\log\frac{p+\frac{1+x}{n}}{1+\frac{x}{n}}$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty} x\cdot\sum_{k=n}^{np}\int_{\frac{k}{x}}^{\frac{k+1}{x}} \frac{1}{t+1}dt = \lim_{n\to\infty} x\cdot\log\frac{p+\frac{1+x}{n}}{1+\frac{x}{n}} = x\log p.$$

③より，$\lim_{n\to\infty} b_n \geqq x\log p$． $\cdots④$

①，②，④より，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty} a_n = x\log p = \log p^x$．

したがって，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = p^x.$$

３． 次の問いに答えよ.

(1) a, b, n は自然数の定数で, b は4の倍数ではなく, $n \geqq 2$ とする.

a が 2^n の倍数であるが, 2^{n+1} の倍数でないとき, $a(a+b)$, $2a(2a+b)$ のいずれかは, 2^{n+1} の倍数であるが, 2^{n+2} の倍数ではないことを示せ.

(2) b は自然数の定数で, 4の倍数ではないとする.

3以上の任意の自然数 n に対して, 次をみたす自然数 a_n が存在することを示せ.

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ は, 小数第 n 位の数字が5である小数第 n 位までの有限小数で表される.

【解説】

(1) a が 2^n の倍数であるが, 2^{n+1} の倍数でないとき, $a=2^n\times p$ (p は奇数) とおける.

(i) b が奇数のとき

$$2a(2a+b)=2\cdot 2^n p(2^n p+b).$$

ここで, $2^n p$ は偶数なので, $2^n p+b$ は奇数であり, また, $2\cdot 2^n p$ は 2^{n+1} の倍数であるが, 2^{n+2} の倍数ではない.

したがって, $2a(2a+b)$ は 2^{n+1} の倍数であるが, 2^{n+2} の倍数ではない.

(ii) b が偶数のとき

b は4の倍数ではないので, $b=4l+2$ (l:整数) とおける. このとき,

$$a(a+b)=2^n p(2^n p+4l+2)=2^n p\cdot 2(2^{n-1}p+2l+1).$$

ここで, n が2以上の整数なので $2^{n-1}p+2l+1$ は奇数である. また $2^n p\cdot 2$ は 2^{n+1} の倍数であるが, 2^{n+2} の倍数でない. したがって, $a(a+b)$ は 2^{n+1} の倍数であるが, 2^{n+2} の倍数ではない.

(i)(ii) より, 題意は示された.

(2) $A_n=\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ とおく. この A_n が小数第 n 位の数字が5である小数第 n 位のまでの有限小数となるとき,

$A_n\times 10^n$ は, 一の位が5であるような整数となる.

$$A_n\times 10^n=\frac{a_n(a_n+b)}{2^n}\times 5^n.$$

(i) b が奇数のとき

$a_n=2^n$ とおけば,

$$A_n\times 10^n=\frac{2^n(2^n+b)}{2^n}\times 5^n=\frac{2\cdot 2^{n-1}(2\cdot 2^{n-1}+b)}{2^n}\times 5^n.$$

ここで, (1) において, $n\geqq 3$ であるような n に対して, $a=2^{n-1}$ とおけば, $2a(2a+b)=2\cdot 2^{n-1}(2\cdot 2^{n-1}+b)$ は 2^n の倍数であるが, 2^{n+1} の倍数でないから, $\dfrac{2^n(2^n+b)}{2^n}$ は, 一の位が奇数の整数である. したがって, $A_n\times 10^n$ は一の位が5であるような整数であることがわかる.

(ii) b が偶数のとき

b は4の倍数ではない偶数である. $a_n=2^{n-1}$ とおけば,

$$A_n\times 10^n=\frac{2^{n-1}(2^{n-1}+b)}{2^n}\times 5^n$$

ここで, (1) において, $n\geqq 3$ であるような n に対して, $a=2^{n-1}$ とおけば, $a(a+b)=2^{n-1}(2^{n-1}+b)$ は 2^n の倍数であるが, 2^{n+1} の倍数でないから, $\dfrac{2^{n-1}(2^{n-1}+b)}{2^n}$ は, 一の位が奇数の整数である. したがって, $A_n\times 10^n$ は一の位が5であるような整数であることがわかる.

(i)(ii) より, 3以上の全ての自然数 n に対して, A_n が数第 n 位の数字が5である小数第 n 位のまでの有限小数となるような自然数 a_n が存在する.

４． Oを原点とする xyz 空間内に，xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面 S と，正四面体OABCがあり，条件「3頂点A，B，Cは S 上にある」をみたしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 正四面体OABCの1辺の長さを求めよ．

(2) 正四面体OABCが条件をみたしながら動くとき，xy 平面による正四面体OABCの切り口の面積の最小値を求めよ．

【解説】

(1) $y=x^2$ を y 軸まわりに回転してできる曲面 S の方程式は，$x^2+z^2=y$．…①

点A，B，Cをそれぞれ $(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$(x_2,\ y_2,\ z_2)$，$(x_3,\ y_3,\ z_3)$ とおくとき，OA＝OB＝OCより，

$$x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2=x_3{}^2+y_3{}^2+z_3{}^2.\ \cdots②$$

また，点A，B，Cが S 上にあることから，方程式①を満たす．ゆえに②は

$$y_1+y_1{}^2=y_2+y_2{}^2=y_3+y_3{}^2.$$

$y_1>0$，$y_2>0$，$y_3>0$ に注意してこれを解くと，

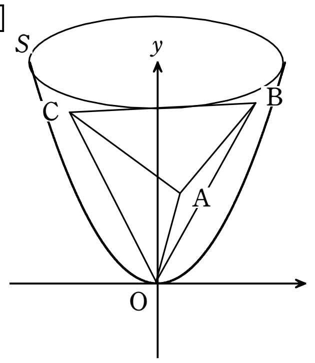
$$y_1=y_2=y_3.$$

いま，曲面 S を $y=y_1$ で切ると，円 $x^2+z^2=\left(\sqrt{y_1}\right)^2$，$y=y_1$ である．ここで，AB＝BC＝CAとなるので，

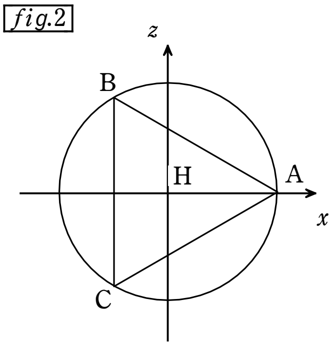
$$\mathrm{A}\left(\sqrt{y_1},\ y_1,\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\sqrt{y_1}\cos\frac{2\pi}{3},\ y_1,\ \sqrt{y_1}\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ \mathrm{C}\left(\sqrt{y_1}\cos\frac{4\pi}{3},\ y_1,\ \sqrt{y_1}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

と置いても一般性を失わない．

$\boxed{fig.1}$



$\boxed{fig.2}$



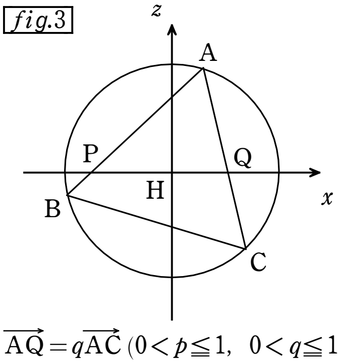
このとき，AB＝$\sqrt{3y_1}$ であり，OA＝ABより，

$$\sqrt{y_1+y_1{}^2}=\sqrt{3y_1}$$

よって，$y_1>0$ に注意してこれを解くと $y_1=2$．このとき，OA＝$\sqrt{6}$．

(2) (1)の $fig.2$ を点H(0，2，0)を中心に回転するとき，△ABCを xy 平面が切り取る線分をPQとする．このとき，xy 平面による正四面体OABCの切り口は，△OPQである．点Pが点Aを除く辺AB上，点Qが点Aを除く辺AC上にあるときを考えても一般性を失わない．

$\boxed{fig.3}$



$fig.3$ のときを考えて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(0<p\leqq1,\ 0<q\leqq1)$ とおく．点Hは△ABCの重心であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3p}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{3q}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}.$$

線分PQが△ABCの重心Hを通ることから，

$$\frac{1}{3p}+\frac{1}{3q}=1. \iff p+q=3pq. \quad \cdots③$$

また，AB$=\sqrt{6}$，AP$=\sqrt{6}\,p$，AQ$=\sqrt{6}\,q$ であることを利用して，△APQ で余弦定理を用いると，

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=6(p^2+q^2-pq). \quad \cdots④$$

p，q は正の実数であるから，相加平均と相乗平均の関係により，

$$p+q\geqq 2\sqrt{pq}. \quad \cdots⑤$$

$p+q=s$ とおき，③，⑤ より

$$s\geqq 2\sqrt{\frac{s}{3}} \iff s^2\geqq\frac{4}{3}s.$$

$s>0$ より $s\geqq\frac{4}{3}$ である．また，④ より，

$$\mathrm{PQ}^2=6\{(p+q)^2-3pq\}=6(s^2-s)=6\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}.$$

また，$s=\frac{4}{3}$ のとき，$p+q=\frac{4}{3}$，$pq=\frac{4}{9}$ であるから，$p=q=\frac{2}{3}$ であり $0<p\leqq 1$，$0<q\leqq 1$ を満たす実数 p，q は確かに存在するので，PQ の長さは最小である．

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{6\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)\right\}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

PQ の長さが最小値をとるとき，△OPQ の面積も最小となり，その大きさは

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot 2=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

【講評】

1． (易)

確率の問題が一問だけ．さらに解答は 2 つだけ．ここは落とせない．今年度の昭和 I 期にも，ほぼ同じ内容の問題があったので，併願者にとっては有利だったかもしれない．丁寧に場合分けをしていけばよい．

2． (標準)

(1) は易しい不等式の証明．これを利用して (2) の極限値を求める．上限は考えやすいが，下限を絞り込むのに少し労力が必要だが，典型的な計算である．

3． (やや難)

(1) は易しい．b が 4 の倍数ではない数という設定なので，偶奇で場合分けすればよい．また (1) が，(2) の美しい誘導になっている． 自然数 a_n を一つ見つければよい．整数の論証は慣れていないと難しいだろう．

4． (やや難)

対称性を意識すると，結果は予想できるだろう．空間座標を設定して解けば，計算で押し通せる．記述形式なので，結果のみではなく，過程を丁寧に記述する必要があるが，文字の設定によって難度が変わる．うまく計算してほしい．

全体的に難易度は，例年通り，またはやや易しいセットになっている．問題数は少ないが，大問 2， 3， 4 はどれも完答するにはそれなりに手間がかかる．数学力の差が表れやすいセットだったと思われる．他の科目の出来にもよるが，1 次突破ラインは 55～60 % 程度であろうか．