# 解答速報

# 東京慈恵会医科大学　数学

2020年 2月5日実施

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{\phantom{00}}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

袋 A には赤玉 3 個，白玉 1 個，袋 B には赤玉 1 個，白玉 3 個が入っている．「袋 A から 2 個の玉を取り出して袋 B に入れ，次に，袋 B から 2 個の玉を取り出して袋 A に入れる」という操作を繰り返す．1 回の操作の後，袋 A に白玉が 2 個以上ある確率は $\boxed{（ア）}$，2 回の操作の後，袋 A の中が白玉だけになる確率は $\boxed{（イ）}$ である．

**解答**

袋 A から玉を取り出す方法は ${}_4C_2$ 通りで同様に確からしく，袋 B から取り出す方法は ${}_6C_2$ 通りで同様に確からしいものとして，以下算出する．

（ア） 1 回の操作の後，袋 A に白玉が 2 個以上あるのは

(i) 袋 A から赤玉 2 個取り出して袋 B に入れ，袋 B（赤玉 3 白玉 3）から「白玉 2 個」または「赤玉 1 個，白玉 1 個」取り出して袋 A に入れる：$\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_2+{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{2}{5}$.

(ii) 袋 A から赤玉 1 個，白玉 1 個取り出して袋 B に入れ，袋 B（赤玉 2 白玉 4）から白玉 2 個取り出して袋 A に入れる：$\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_1C_1}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{5}$.

ときである．

(i)(ii) は互いに排反なので，求める確率は $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$.

（イ） 袋の中の赤玉，白玉の個数がそれぞれ $a$，$b$ のときの状態を $(a,\ b)$ で表すこととする．

2 回の操作の後，袋 A の中が白玉だけになるのは，1 回の操作の後，袋 A の中に赤玉が 2 個以下になっているときであることを考慮すると，袋の中の状態の推移は以下の 3 通りである．

| | 袋 A | | 袋 B | | 袋 A | | 袋 B | | 袋 A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (iii) | (3，1) | → | (3，3) | → | (1，3) | → | (4，2) | → | (0，4) |
| | | 赤 2 | | 白 2 | | 赤 1 白 1 | | 白 2 | |
| (iv) | (3，1) | → | (3，3) | → | (2，2) | → | (4，2) | → | (0，4) |
| | | 赤 2 | | 赤 1 白 1 | | 赤 2 | | 白 2 | |
| (v) | (3，1) | → | (2，4) | → | (2，2) | → | (4，2) | → | (0，4) |
| | | 赤 1 白 1 | | 白 2 | | 赤 2 | | 白 2 | |

それぞれの確率を計算すると

(iii) $\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\cdot\dfrac{{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2}$

(iv) $\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2}$

(v) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} \cdot \dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} \cdot \dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} \cdot \dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}$

よって，これらは互いに排反なので，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_1\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} \\
&\quad + \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} + \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} \\
&= \frac{27+27+18}{6 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 15} \\
&= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{225}}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$

$p$ を 2 以上の自然数の定数とする．$n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)\ (x > 0)$ を

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{pn}\right)$$

で定める．例えば，$p = 2$ のとき

$$f_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{4}\right)$$
$$f_3(x) = \left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{4}\right)\left(1 + \frac{x}{5}\right)\left(1 + \frac{x}{6}\right)$$

である．$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ (x > 0)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$t \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t}{1+t} \leqq \log(1+t) \leqq t$ が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

解答

(1)　$t \geqq 0$ のとき，$F(t) = \log(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$，$G(t) = t - \log(1+t)$ とおく．

$$F'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \geqq 0$$

であるから，$F(t)$ は $t \geqq 0$ で単調に増加し，$F(t) \geqq F(0) = 0$.
また，

$$G'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geqq 0$$

であるから，$G(t)$ も $t \geqq 0$ で単調に増加し，$G(t) \geqq G(0) = 0$.

したがって，$t \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t}{1+t} \leqq \log(1+t) \leqq t$ が成り立つ.

(2)　$a_n = \log f_n(x)$ とおく．

$$\begin{aligned} a_n &= \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\left(1 + \frac{x}{n+2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{pn}\right) \\ &= \sum_{k=n}^{np} \log\left(1 + \frac{x}{k}\right) \end{aligned}$$

(1) より，$t = \dfrac{x}{k} > 0$ を用いると，

$$\frac{\frac{x}{k}}{1 + \frac{x}{k}} \leqq \log\left(1 + \frac{x}{k}\right) \leqq \frac{x}{k}.$$

したがって，

$$\sum_{k=n}^{np} \frac{\frac{x}{k}}{1 + \frac{x}{k}} \leqq a_n \leqq \sum_{k=n}^{np} \frac{x}{k}. \quad \cdots\cdots①$$

ここで，$b_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{np}\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}$，$c_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{np}\frac{x}{k}$ とおく．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}c_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{np}\frac{x}{k}+\frac{x}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{np}\frac{x}{\frac{k}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\\&=\int_1^p\frac{x}{t}dt+0\\&=x\log p.\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

また，$b_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{np}\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}=\sum_{k=n}^{np}\frac{1}{\frac{k}{x}+1}$ であり，$g(t)=\dfrac{1}{t+1}$ $(t>0)$ とおく．$g(t)$ は $t>0$ で単調減少するので，区間 $\left[\dfrac{k}{x},\ \dfrac{k+1}{x}\right]$ において，$g(t)\leqq g\left(\dfrac{k}{x}\right)$．すなわち，

$$\int_{\frac{k}{x}}^{\frac{k+1}{x}}\frac{1}{t+1}dt<\frac{1}{x}\cdot g\left(\frac{k}{x}\right).$$

$$x\cdot\sum_{k=n}^{np}\int_{\frac{k}{x}}^{\frac{k+1}{x}}\frac{1}{t+1}dt<\sum_{k=n}^{np}g\left(\frac{k}{x}\right)=b_n.\quad\cdots\cdots③$$

ここで，③ の左辺を計算すると，

$$\begin{aligned}x\cdot\sum_{k=n}^{np}\int_{\frac{k}{x}}^{\frac{k+1}{x}}\frac{1}{t+1}dt&=x\cdot\int_{\frac{n}{x}}^{\frac{np+1}{x}}\frac{1}{t+1}dt\\&=x\cdot\Big[\log|t+1|\Big]_{\frac{n}{x}}^{\frac{np+1}{x}}\\&=x\left\{\log\left(\frac{np+1}{x}+1\right)-\log\left(\frac{n}{x}+1\right)\right\}\\&=x\cdot\log\frac{\frac{np+1+x}{x}}{\frac{n+x}{x}}\\&=x\cdot\log\frac{p+\frac{1+x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\end{aligned}$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}x\cdot\sum_{k=n}^{np}\int_{\frac{k}{x}}^{\frac{k+1}{x}}\frac{1}{t+1}dt=\lim_{n\to\infty}x\cdot\log\frac{p+\frac{1+x}{n}}{1+\frac{x}{n}}=x\log p.$$

③ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n\geqq x\log p.\quad\cdots\cdots④$

①，②，④ より，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=x\log p=\log p^x$．したがって，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}e^{a_n}=\boldsymbol{p^x}.$$

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1)　$a$，$b$，$n$ は自然数の定数で，$b$ は 4 の倍数ではなく，$n \geqq 2$ とする．
$a$ が $2^n$ の倍数であるが，$2^{n+1}$ の倍数でないとき，$a(a+b)$，$2a(2a+b)$ のいずれかは，$2^{n+1}$ の倍数であるが，$2^{n+2}$ の倍数ではないことを示せ．

(2)　$b$ は自然数の定数で，4 の倍数ではないとする．
3 以上の任意の自然数 $n$ に対して，次をみたす自然数 $a_n$ が存在することを示せ．
$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ は，小数第 $n$ 位の数字が 5 である小数第 $n$ 位までの有限小数で表される．

解答

(1)　$a$ が $2^n$ の倍数であるが，$2^{n+1}$ の倍数でないとき，$a = 2^n \times p$（$p$ は奇数）とおける．

(i)　$b$ が奇数のとき

$$2a(2a+b) = 2 \cdot 2^n p(2^n p + b).$$

ここで，$2^n p$ は偶数なので，$2^n p + b$ は奇数であり，また，$2 \cdot 2^n p$ は $2^{n+1}$ の倍数であるが，$2^{n+2}$ の倍数ではない．
したがって，$2a(2a+b)$ は $2^{n+1}$ の倍数であるが，$2^{n+2}$ の倍数ではない．

(ii)　$b$ が偶数のとき
$b$ は 4 の倍数ではないので，$b = 4l + 2$（$l$：整数）とおける．このとき，

$$\begin{aligned} a(a+b) &= 2^n p(2^n p + 4l + 2) \\ &= 2^n p \cdot 2(2^{n-1} p + 2l + 1). \end{aligned}$$

ここで，$n$ が 2 以上の整数なので $2^{n-1}p + 2l + 1$ は奇数である．また $2^n p \cdot 2$ は $2^{n+1}$ の倍数であるが，$2^{n+2}$ の倍数でない．したがって，$a(a+b)$ は $2^{n+1}$ の倍数であるが，$2^{n+2}$ の倍数ではない．

(i)，(ii) より，題意は示された．

(2)　$A_n = \dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ とおく．この $A_n$ が小数 $n$ 位の数字が 5 である小数第 $n$ 位までの有限小数となるとき，$A_n \times 10^n$ は，一の位が 5 であるような整数となる．

$$A_n \times 10^n = \frac{a_n(a_n+b)}{2^n} \times 5^n.$$

(i)　$b$ が奇数のとき
$a_n = 2^n$ とおけば，

$$\begin{aligned} A_n \times 10^n &= \frac{2^n(2^n+b)}{2^n} \times 5^n \\ &= \frac{2 \cdot 2^{n-1}(2 \cdot 2^{n-1} + b)}{2^n} \times 5^n. \end{aligned}$$

ここで，(1) において，$n \geqq 3$ であるような $n$ に対して，$a = 2^{n-1}$ とおけば，$2a(2a+b) = 2 \cdot 2^{n-1}(2 \cdot 2^{n-1} + b)$ は $2^n$ の倍数であるが，$2^{n+1}$ の倍数でないから，$\dfrac{2^n(2^n+b)}{2^n}$ は，一の位が奇数の整数である．したがって，$A_n \times 10^n$ は一の位が 5 であるような整数であることがわかる．

(ii)　$b$ が偶数のとき
$b$ は 4 の倍数ではない偶数である．$a_n = 2^{n-1}$ とおけば，

$$A_n \times 10^n = \frac{2^{n-1}(2^{n-1}+b)}{2^n} \times 5^n$$

ここで，(1) において，$n \geqq 3$ であるような $n$ に対して，$a = 2^{n-1}$ とおけば，$a(a+b) = 2^{n-1}(2^{n-1}+b)$ は $2^n$ の倍数であるが，$2^{n+1}$ の倍数でないから，$\dfrac{2^{n-1}(2^{n-1}+b)}{2^n}$ は，一の位が奇数の整数である．したがって，$A_n \times 10^n$ は一の位が 5 であるような整数であることがわかる．

(i)，(ii) より，3 以上の全ての自然数 $n$ に対して，$A_n$ が小数第 $n$ 位の数字が 5 である小数第 $n$ 位までの有限小数となるような自然数 $a_n$ が存在する．

$\boxed{4}$

O を原点とする $xyz$ 空間内に，$xy$ 平面上の放物線 $y=x^2$ を $y$ 軸のまわりに回転してできる曲面 $S$ と，正四面体 OABC があり，条件「3 頂点 A，B，C は $S$ 上にある」をみたしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　正四面体 OABC の 1 辺の長さを求めよ．

(2)　正四面体 OABC が条件をみたしながら動くとき，$xy$ 平面による正四面体 OABC の切り口の面積の最小値を求めよ．

解答

(1)　$y=x^2$ を $y$ 軸まわりに回転してできる曲面 $S$ の方程式は，$x^2+z^2=y$．　$\cdots\cdots$①

点 A，B，C をそれぞれ $(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$(x_2,\ y_2,\ z_2)$，$(x_3,\ y_3,\ z_3)$ とおくとき，OA = OB = OC より，

$$ {x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2={x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2={x_3}^2+{y_3}^2+{z_3}^2 \quad \cdots\cdots ② $$

また，点 A，B，C が $S$ 上にあることから，方程式 ① をみたす．ゆえに ② は

$$ y_1+{y_1}^2=y_2+{y_2}^2=y_3+{y_3}^2. $$

$y_1>0$，$y_2>0$，$y_3>0$ に注意してこれを解くと，

$$ y_1=y_2=y_3 $$

いま，曲面 $S$ を $y=y_1$ で切ると，円 $x^2+z^2=(\sqrt{y_1})^2$，$y=y_1$ である．ここで，AB = BC = CA となるので，

$$ \mathrm{A}(\sqrt{y_1},\ y_1,\ 0),\ \mathrm{B}\left(\sqrt{y_1}\cos\frac{2\pi}{3},\ y_1,\ \sqrt{y_1}\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ \mathrm{C}\left(\sqrt{y_1}\cos\frac{4\pi}{3},\ y_1,\ \sqrt{y_1}\sin\frac{4\pi}{3}\right) $$

と置いても一般性を失わない．

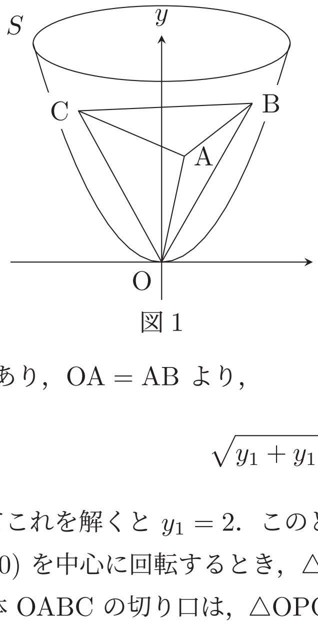

図 1

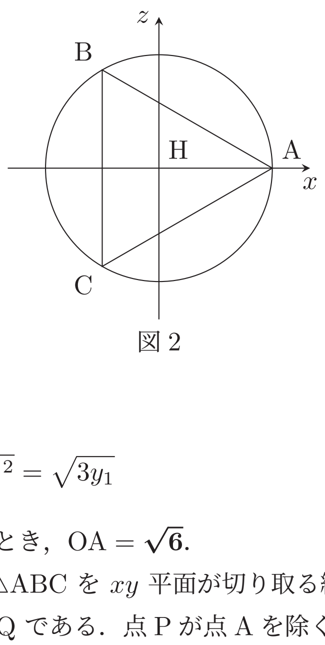

図 2

このとき，$\mathrm{AB}=\sqrt{3y_1}$ であり，OA = AB より，

$$ \sqrt{y_1+{y_1}^2}=\sqrt{3y_1} $$

よって，$y_1>0$ に注意してこれを解くと $y_1=2$．このとき，$\mathrm{OA}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$.

(2)　(1) の図 2 を点 H(0, 2, 0) を中心に回転するとき，△ABC を $xy$ 平面が切り取る線分を PQ とする．このとき，$xy$ 平面による正四面体 OABC の切り口は，△OPQ である．点 P が点 A を除く辺 AB 上，点 Q が点 A を除く辺 AC 上にあるときを考えても一般性を失わない．

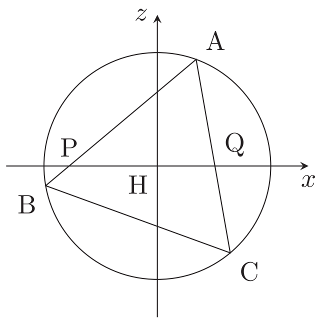


図 3

図 3 のときを考えて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$0<p\leqq 1$，$0<q\leqq 1$）とおく．点 H は △ABC の重心であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3p}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{3q}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}.$$

線分 PQ が △ABC の重心 H を通ることから，

$$\frac{1}{3p}+\frac{1}{3q}=1\iff p+q=3pq$$

また，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AP}=\sqrt{6}p$，$\mathrm{AQ}=\sqrt{6}q$ であることを利用して，△APQ で余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\\&=6(p^2+q^2-pq)\quad\cdots\cdots④\end{aligned}$$

$p$，$q$ は正の実数であるから，相加平均と相乗平均の関係により，

$$p+q\geqq 2\sqrt{pq}\quad\cdots\cdots⑤$$

$p+q=s$ とおき，③，⑤ より

$$s\geqq 2\sqrt{\frac{s}{3}}\iff s^2\geqq\frac{4}{3}s.$$

$s>0$ より $s\geqq\dfrac{4}{3}$ である．また，④ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=6\{(p+q)^2-3pq\}\\&=6(s^2-s)\\&=6\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}.\end{aligned}$$

また，$s=\dfrac{4}{3}$ のとき，$p+q=\dfrac{4}{3}$，$pq=\dfrac{4}{9}$ であるから，$p=q=\dfrac{2}{3}$ であり $0<p\leqq 1$，$0<q\leqq 1$ を満たす実数 $p$，$q$ は確かに存在するので，PQ の長さは最小である．

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{6\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)\right\}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

PQ の長さが最小値をとるとき，△OPQ の面積も最小となり，その大きさは

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot 2=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}}.$$

## 講評

$\boxed{1}$（易）
確率の問題が 1 問だけ．さらに解答は 2 つだけ．ここは落とせない．今年度の昭和 I 期にも，ほぼ同じ内容の問題があったので，併願者にとっては有利だったかもしれない．丁寧に場合分けをしていけばよい．

$\boxed{2}$（標準）
(1) は易しい不等式の証明．これを利用して (2) の極限値を求める．上限は考えやすいが，下限を絞り込むのに労力が必要だが，典型的な計算である．

$\boxed{3}$（やや難）(1) は易しい．$b$ が 4 の倍数ではない数という設定なので，偶奇で場合分けすればよい．また (1) が，(2) の美しい誘導になっている．自然数 $a_n$ を 1 つ見つければよい．整数の論証は慣れていないと難しいだろう．

$\boxed{4}$（やや難）対称性を意識すると，結果は予想できるだろう．空間座標を設定して解けば，計算で押し通せる．記述形式なので，結果のみではなく，過程を丁寧に記述する必要があるが，文字の設定によって難度が変わる．うまく計算してほしい．

全体的に難易度は，例年通り，またはやや易しいセットになっている．問題数は少ないが，大問 2，3，4 はどれも完答するにはそれなりに手間がかかる．数学力の差が表れやすいセットだったと思われる．他の科目の出来にもよるが，1 次突破ラインは 55 %～60 %程度であろうか．