医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

順天堂大学医学部　数学

2020年 2月4日実施

$\boxed{1}$ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ．ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値が入る．

(1) △ABC の辺 AB，BC，CA を 3 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E，F とし，線分 AE と BF の交点を P，BF と CD の交点を Q，CD と AE の交点を R とする．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}\vec{c}$ となる．

また，AP : PR : RE = $\boxed{サ}$: $\boxed{シ}$: $\boxed{ス}$ であり，△PQR の面積は △ABC の面積の $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$ 倍である．△PQR の重心を G とすると $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\vec{c}$ となる．

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\vec{b}+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\vec{c}$.

△ACE と直線 BF について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BE}}\cdot\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}=1 \quad \therefore\ \frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}=\frac{9}{4}$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}\vec{b}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{13}}\vec{c}.$$

また，△ABE と直線 DC について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{RA}}=1 \quad \therefore\ \frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{RA}}=\frac{1}{12}$$

したがって，AP : PE = 4 : 9，AR : RE = 12 : 1 より

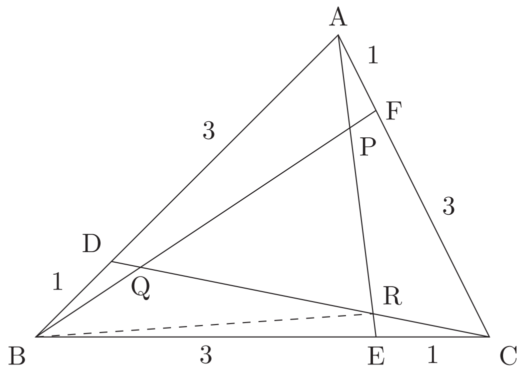
$$\mathrm{AP}:\mathrm{PR}:\mathrm{RE}=\mathbf{4:8:1}.$$

同様にして，BQ : QP : PF = 4 : 8 : 1 であるので

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR}&=\frac{8}{12}\times\triangle\mathrm{BPR}\\&=\frac{8}{12}\times\frac{8}{13}\times\triangle\mathrm{ABE}\\&=\frac{8}{12}\times\frac{8}{13}\times\frac{3}{4}\times\triangle\mathrm{ABC}\\&=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{13}}\triangle\mathrm{ABC}.\end{aligned}$$

対称性より，$\triangle$ABC の重心と $\triangle$PQR の重心は一致するので

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{b} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{c}.$$



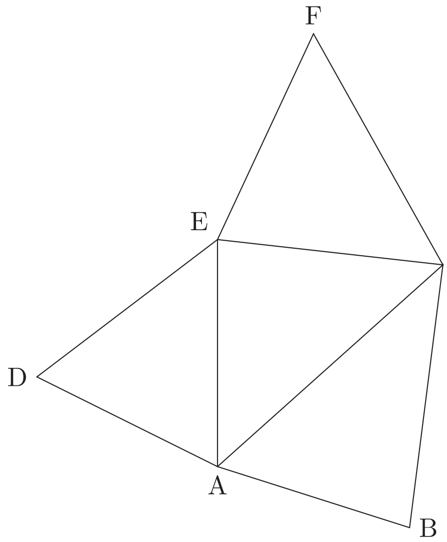
$\boxed{1}$

(2)　下図は四面体の展開図で，$\mathrm{AB}=\dfrac{4}{3}$，$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{DE}=\mathrm{EA}=\mathrm{EC}=\mathrm{EF}$，$\cos\angle\mathrm{ADE}=\dfrac{\sqrt{14}}{8}$，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\dfrac{5\sqrt{7}}{12}$ である．この展開図から $\triangle\mathrm{ABC}$ を底面とした四面体 EABC をつくる．$\triangle\mathrm{ABC}$ を含む平面を α とし，四面体 EABC の頂点 E から α に下した垂線を EP とする．

(i)　このとき，$\mathrm{DE}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$，$\mathrm{BC}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，

$\mathrm{AP}=\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ となる．

(ii)　四面体 EABC の 4 つの頂点が球 S 上にあるとき，S の半径は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ となる．



展開図

$\boxed{\text{解答}}$

(i)　$\triangle\mathrm{ADE}$ において，余弦定理より

$$\mathrm{AE}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{DE}^2-2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}\cdot\cos\angle\mathrm{ADE}$$

$\mathrm{AE}=\mathrm{DE}$，$\mathrm{AD}=\dfrac{4}{3}$，$\cos\angle\mathrm{ADE}=\dfrac{\sqrt{14}}{8}$ を代入して，$\mathrm{DE}=\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{14}}{21}}$.

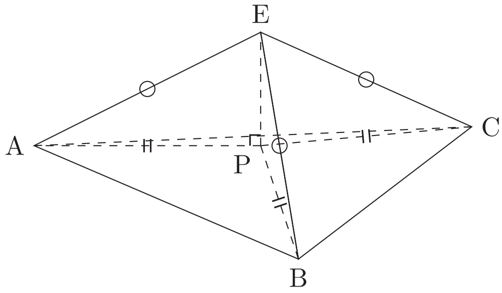
また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が $\dfrac{5\sqrt{7}}{12}$ であることにより

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{5\sqrt{7}}{12}$$

$\mathrm{AB}=\dfrac{4}{3}$，$\mathrm{AC}=2$ を代入して，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{7}}{16}}$.

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，余弦定理を用いて，BC を求めておくと，$\mathrm{BC}=\boldsymbol{\dfrac{5}{3}}$.

四面体 EABC は次図のようになるので，$\mathrm{EA}=\mathrm{EB}=\mathrm{EC}$ より，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ である．



したがって，点 P は △ABC の外心であるから，正弦定理を用いて

$$2\mathrm{AP} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$$
$$\therefore\ \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$\mathrm{BC} = \dfrac{5}{3}$ を代入して，$\mathrm{AP} = \boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{7}}{21}}$.

(ii) EA = EB = EC より，外接円の中心 O は直線 AP 上に存在する．

四面体 EABC の外接球の半径を R とすると，三平方の定理をもちいて

$$\mathrm{BP} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AP}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{63}{64}}$$
$$\mathrm{EP} = \sqrt{\mathrm{EA}^2 - \mathrm{AP}^2} = \frac{8\sqrt{7}}{21} \qquad (1:1:\sqrt{2}\text{の直角三角形の比に注目してもよい.})$$

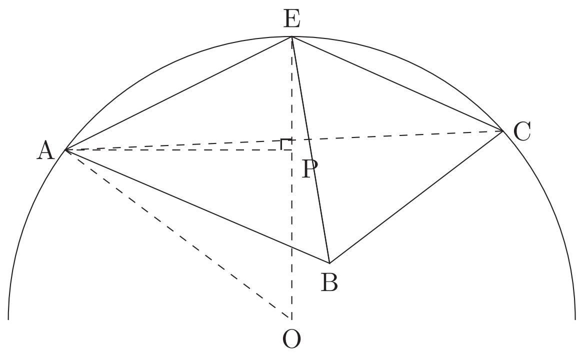
したがって，$\sqrt{R^2 - \dfrac{64}{63}} < R$ より，OE = OP + PE であるから

$$R = \sqrt{R^2 - \frac{64}{63}} + \frac{8\sqrt{7}}{21} \iff R - \frac{8\sqrt{7}}{21} = \sqrt{R^2 - \frac{64}{63}}$$

両辺 2 乗して

$$\left(R - \frac{8\sqrt{7}}{21}\right)^2 = \left(\sqrt{R^2 - \frac{64}{63}}\right)^2 \quad \therefore R = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{7}}{21}}.$$

これは OE = OP + PE を満たす.



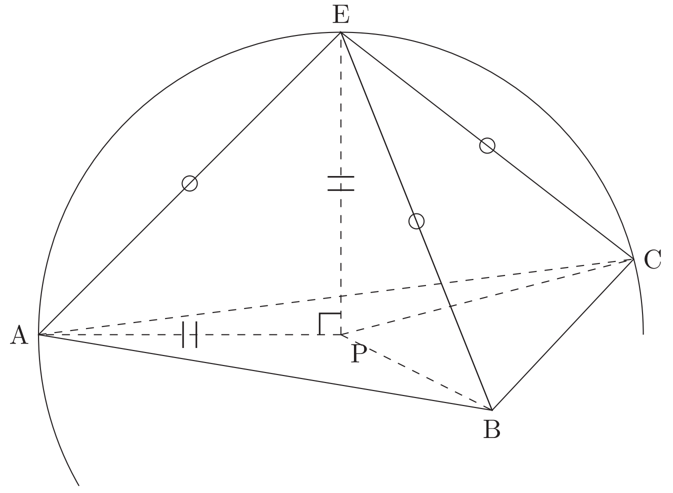
別解

外接球の半径は図形的な解釈から次のように解くこともできる.

$\mathrm{AE} = \dfrac{8\sqrt{14}}{21}$，$\mathrm{AP} = \dfrac{8\sqrt{7}}{21}$，$\angle\mathrm{APE} = 90^\circ$ より，△AEP は $\mathrm{AP}:\mathrm{PE}:\mathrm{AE} = 1:1:\sqrt{2}$ の直角三角形である.

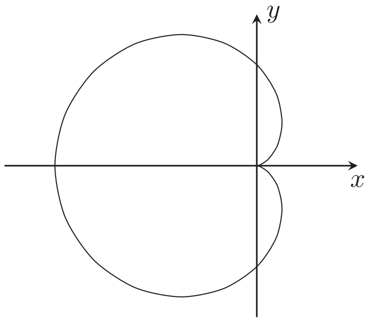
すなわち，$\angle\mathrm{EAP} = \angle\mathrm{AEP} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{APE} = 90^\circ$ であるので，点 P が外接球の中心となる.

よって，外接円の半径は，$\mathrm{AP} = \mathrm{PE} = \dfrac{8\sqrt{7}}{21}$.

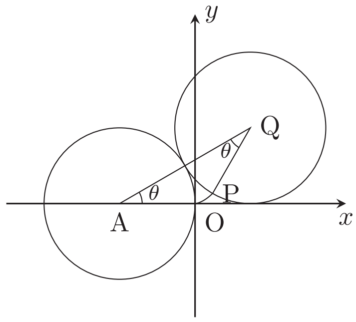

E
C
A
P
B

$\boxed{1}$

(3)　点 A$(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 A があり，半径 1 の円 Q は円 A に外接しながら滑ることなく反時計回りに一周する．円 Q 上の点 P ははじめ原点にある．点 P が描く曲線（下図左）について考えよう．下図右は角 θ 回転した状態を示す．円 Q の中心 Q の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}\cos\theta-\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ア}}\sin\theta\right)$ なので，点 P の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}\cos\theta-\cos\boxed{\text{ウ}}\theta-\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ア}}\sin\theta-\sin\boxed{\text{ウ}}\theta\right)$ となる．したがって，点 P が描く曲線は極座標で $r(\theta)=\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\cos\theta$ と表される．一般に極座標で $r=r(\theta)\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と表される曲線に囲まれた部分の面積は $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta$，曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$ により求められるので，点 P が描く曲線に囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{カ}}\pi$，曲線の長さは $\boxed{\text{キク}}$ となる．



点 P が描く曲線



はじめから θ 回転したとき

解答

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(-1,\ 0)+(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)=(2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta)$$

よって $\mathbf{Q(2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta)}$.

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であり，図より

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(\cos(\pi+2\theta),\ \sin(\pi+2\theta))=(-\cos 2\theta,\ -\sin 2\theta)$$

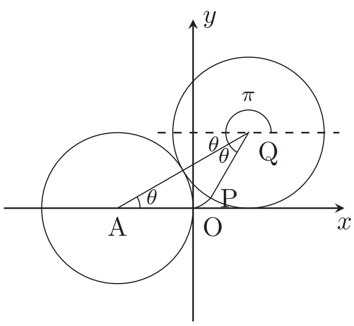
であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(2\cos\theta-\cos 2\theta-1,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)$$

$$\therefore\ \mathbf{P(2\cos\theta-\cos 2\theta-1,\ 2\sin\theta-\sin 2\theta)}.$$

ここで，P$(x,\ y)$ とすると

$$x=2\cos\theta-\cos 2\theta-1,\ y=2\sin\theta-\sin 2\theta$$



$r^2=x^2+y^2$ より

$$\begin{aligned}r^2&=(2\cos\theta-\cos 2\theta-1)^2+(2\sin\theta-\sin 2\theta)^2\\&=4(1-\cos\theta)^2\end{aligned}$$

$r > 0$ より

$$r = \mathbf{2(1 - \cos\theta)}.$$

よって，求める面積 S，曲線の長さ L は

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 2^2 (1 - \cos\theta)^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (3 - 4\cos\theta + \cos 2\theta) d\theta \\
&= \left[3\theta - 4\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\
&= \mathbf{6\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2^2(1 - \cos\theta)^2 + 2^2 \sin^2\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\
&= \left[-8\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\
&= \mathbf{16}.
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

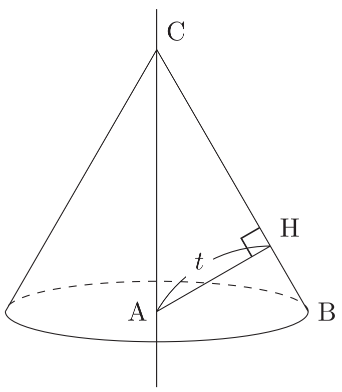
(1) $\angle A = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{AB} = r$，$\mathrm{BC} = 3r$ である直角三角形 ABC を辺 AC の周りに 1 回転させてできる回転体について考える．辺 BC を底辺としたときの三角形 ABC の高さを t とおくと，$t = \dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}r$ である．この回転体の体積を t で表すと $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\pi t^3$ である．これを t で微分すると，この回転体の側面積が得られる．したがって，この回転体の表面積は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi t^2$ と表される．

(2) 座標平面上に原点 O を中心とする半径 r の円 O がある．円周上に点 $\mathrm{A}(-r,\ 0)$，$\mathrm{B}(r,\ 0)$ をとり，点 A を通り傾き $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ の直線と円 O との点 A 以外の交点を C とする．点 C の座標は $\left(\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}r,\ \dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}r\right)$ である．線分 OB，OC および弧 BC で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積が $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi r^3$ であることに注意すると，この回転体の表面積は $\dfrac{\boxed{セ}+\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}\pi r^2$ であることがわかる．

(3) 座標平面上の点 $\mathrm{R}(0,\ R)$ を中心とし，半径が r の円 $(0 < r < R)$ を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体（トーラス）の体積を $a\pi^b r^c R^d$ と表すと，$a = \boxed{チ}$，$b = \boxed{ツ}$，$c = \boxed{テ}$，$d = \boxed{ト}$ である．これより，この回転体の表面積を $s\pi^t r^u R^v$ と表すと，$s = \boxed{ナ}$，$t = \boxed{ニ}$，$u = \boxed{ヌ}$，$v = \boxed{ネ}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

(1)



$\mathrm{AB} = r$，$\mathrm{AC} = 2\sqrt{2}r$ であるから，求める回転体（円錐）の体積 V_1 は

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot 2\sqrt{2}r = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3.$$

また，上図のように t を置くとき，$\triangle$ABC の面積より，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot t$$

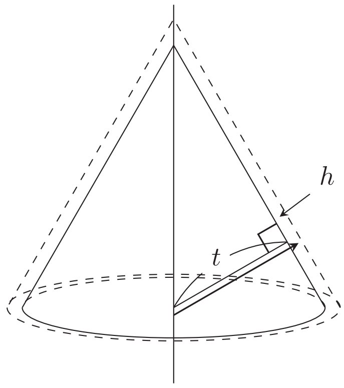
$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2\sqrt{2}r = \frac{1}{2}\cdot 3r\cdot t$$

$$\iff r = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

よって $t = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}r}$.

V_1 を t を用いて表すと,

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}t\right)^3 = \boldsymbol{\frac{9}{8}\pi t^3} \quad \cdots\cdots ①$$



いま,表面積を t の関数と考えて $S(t)$ とおく.$S(t)$ は t について単調増加である.このときの体積も t の関数であるとして $V(t)$ と表す.いま,t の値を h だけ大きくするとき,体積は $V(t)$ から $V(t+h)$ に変化する.このときの体積の増加分は,立体の表面に対して垂直方向に高さ h だけ増加するので,以下の不等式が成り立つ.

$$S(t) \times h < V(t+h) - V(t) < S(t+h) \times h$$

$$\Longleftrightarrow S(t) < \frac{V(t+h) - V(t)}{h} < S(t+h)$$

ここで,$\displaystyle\lim_{h \to +0} S(t+h) = S(t)$,$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} = V'(t)$ であるから,はさみうちの原理により,

$$S(t) = V'(t)$$

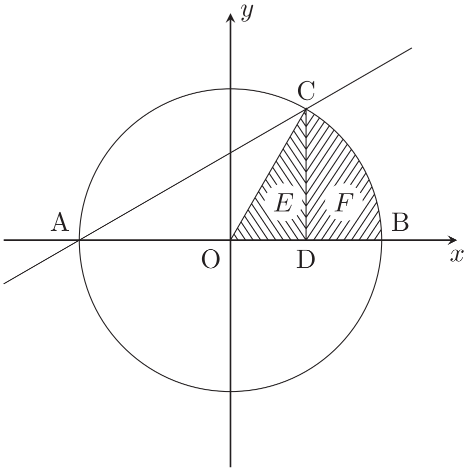
であることがわかる.すなわち,体積① を t で微分することにより,この円錐面の側面積 S_1 が求まる.

$$S_1 = \frac{d}{dt}V_1 = \frac{27}{8}\pi t^2.$$

また,この立体の表面積は,S_1 と底面積の和で求まるので,

$$\frac{27}{8}\pi t^2 + \pi r^2 = \frac{27}{8}\pi t^2 + \frac{9}{8}\pi t^2 = \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi t^2}.$$

(2)　(1) と同様にして表面積を求めよう.



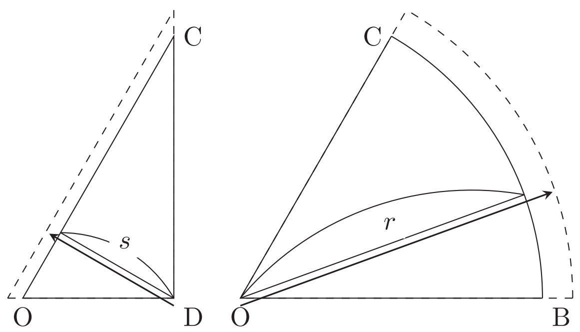
点 A を通り傾き $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ の直線は，$\angle\mathrm{BAC} = 30^\circ$ を満たし，円周角と中心角の関係から $\angle\mathrm{BOC} = 60^\circ$ だとわかる．すなわち，点 C の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)}$.

次に，線分 OB，OC および弧 BC で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体について考える．上の図のように，$0 \leqq x \leqq \dfrac{r}{2}$ の部分を図形 E，$\dfrac{r}{2} \leqq x \leqq r$ の部分を図形 F とする．E を回転してできる立体の体積を V_E，F を回転してできる立体の体積を V_F とおけば，

$$\begin{aligned} V_E &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \mathrm{CD}^2 \cdot \mathrm{OD} \\ &= \frac{1}{8}\pi r^3. \\ V_F &= \pi \int_{\frac{r}{2}}^{r} y^2 dx \\ &= \pi \int_{\frac{r}{2}}^{r} (r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{5}{24}\pi r^3. \end{aligned}$$

したがって，求める回転体の体積 V_2 は，

$$V_2 = V_E + V_F = \frac{1}{8}\pi r^3 + \frac{5}{24}\pi r^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^3}.$$



次に表面積を考える．線分 OC によってできた側面積を S_E とおく．$\triangle\mathrm{OCD}$ において，OC を底辺と見たときの高さを s とおけば，

$$s = \frac{r}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} r.$$

E を回転してできた立体の体積 V_E を s の関数と考えれば，(1) と同様にして

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{d}{ds} V_E \\ &= \frac{d}{dr} V_E \cdot \frac{dr}{ds} \\ &= \frac{3}{8}\pi r^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2. \end{aligned}$$

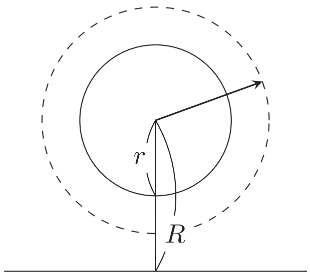
次に，弧 BC によって作られる側面積 S_F を求める．弧 BC 上の任意の点から，法線を図形の内側に下ろすとき，全てが点 O で交わる．すなわち，この回転体全体の体積 V_2 は r の関数として表すことができる．(1) と同様にして

$$S_F = \frac{d}{dr} V_2 = \pi r^2.$$

したがって，この立体図形全体の表面積は，

$$S_E + S_F = \boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{2}\pi r^2}.$$

(3)



図のような円を x 軸まわりに回転するとき，パップスギュルダンの定理により，

$$\begin{aligned} V_3 &= (\text{円の面積}) \times (\text{中心の移動した距離}) \\ &= \pi r^2 \times 2\pi R \\ &= \boldsymbol{2\pi^2 r^2 R}. \end{aligned}$$

また，この表面上の点から法線を図形の内側におろすと，断面の円の中心で交わる．
すなわち，この立体の体積 V_3 は r の関数であることがわかる．ゆえに，

$$S(r) = \frac{d}{dr}V_3 = \boldsymbol{4\pi^2 r R}.$$

$\boxed{3}$

(1)　$x>0$ のとき，すべての自然数 n について次の不等式が成り立つ．

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

この不等式から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ を導け．

(2)　a を定数として，点 $(0,\ a)$ から曲線 $y=(1+x)e^x$ に引くことのできる接線の本数を求めよ．

解答

(1)　$x>0$ において，

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \quad \cdots\cdots ①$$

がすべての自然数 n で成り立つことから，$n=3$ を不等式 ① に代入して，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}>\dfrac{x^3}{6}$ が $x>0$ で成り立つ．

ゆえに，$x>0$ において $\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{6}{x^3}$ が成り立つ．この両辺に $x^2\ (>0)$ を掛けることで

$$\frac{x^2}{e^x}<\frac{6}{x} \quad \text{すなわち} \quad 0<\frac{x^2}{e^x}<\frac{6}{x}$$

が成り立つ．ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}=0$ であることから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$（証明終わり）

【補足】

$x>0$ のとき，すべての自然数 n について次の不等式

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \quad \cdots\cdots ①$$

であることの証明も重要である．数学的帰納法による解答例を示しておく．

$f_n(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)\ (x>0)$ とおく．

(i)　$n=1$ のとき

$e^x>x+1$ を示す．$f_1(x)=e^x-(1+x)\ (x>0)$ より $f_1'(x)=e^x-1>0$（$\because\ x>0$）であるので，$f_1(x)$ は $x>0$ において単調増加である．

したがって，$f_1(x)>f_1(0)=0$ より，$n=1$ のとき，① が示された．

(ii)　$n=k$（k は自然数）のとき

① が成立すると仮定すると，$f_k(x)>0$.

このとき，$n=k+1$ について

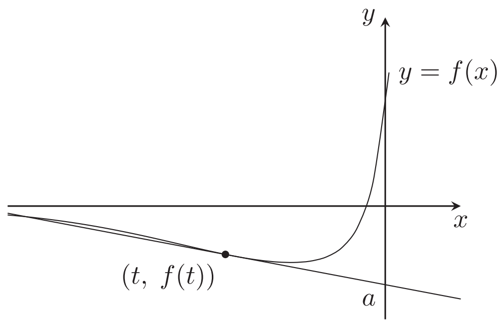
$f_{k+1}(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^k}{k!}+\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)\ (x>0)$ より

$f_{k+1}'(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^k}{k!}\right)=f_k(x)>0$ であるので，$f_{k+1}(x)$ は $x>0$ において単調増加である．

したがって，$f_{k+1}(x)>f_{k+1}(0)=0$ より，$n=k+1$ のとき，① が示された．

よって，(i) (ii) より，結論を得る．（証明終わり）

(2)　$f(x)=(1+x)e^x$ とおくと $f'(x)=(2+x)e^x$



$y=f(x)$ のグラフの形から，ある 1 本の接線に対して，接点が 1 つだけ存在することに注意すると，

$$(\text{接線の本数})=(\text{接点の個数})$$

である．よって，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 l の方程式は

$$l : y=(2+t)e^t(x-t)+(1+t)e^t$$

接線 l が点 $(0,\ a)$ を通るとき

$$a=(-t^2-t+1)e^t$$

が成り立つ．ここで，$g(t)=(-t^2-t+1)e^t$ とすると

$$g'(t)=(-t^2-3t)e^t=-t(3+t)e^t$$

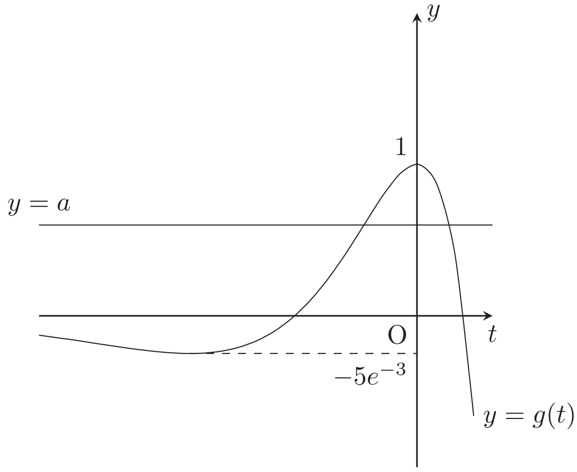
これより，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	$-5e^{-3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$

また，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)=-\infty$ であり，$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} g(t)$ については，$t=-s$ とおくことで

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty} g(t)&=\lim_{s\to\infty}(-s^2-s+1)e^{-s}\\&=\lim_{s\to\infty}\left(-\frac{s^2}{e^2}-\frac{s^2}{e^s}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{e^s}\right)\\&=0\quad\left(\because\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\right)\end{aligned}$$

これより，$y=g(t)$ のグラフは図のようになる．



$a = g(t)$ をみたす実数解の個数が，接線の本数に一致することから，$y = g(t)$ と $y = a$ の共有点の個数を調べることで，求める接線の本数は

$$\begin{cases} 1 < a \text{ のとき} & 0 \text{ 本} \\ a = 1,\ a < -\dfrac{5}{e^3} \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \\ a = -\dfrac{5}{e^3},\ 0 \leqq a < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \\ -\dfrac{5}{e^3} < a < 0 \text{ のとき} & 3 \text{ 本} \end{cases}$$

別解

変曲点に注目してグラフの考察を行う．

$f(x) = (1+x)e^x$ とおくと $f'(x) = (2+x)e^x$，$f''(x) = (3+x)e^x$

したがって，$y = f(x)$ の増減，凹凸およびグラフは次のようになる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-2e^{-3}$	$\searrow$	e^{-2}	$\nearrow$

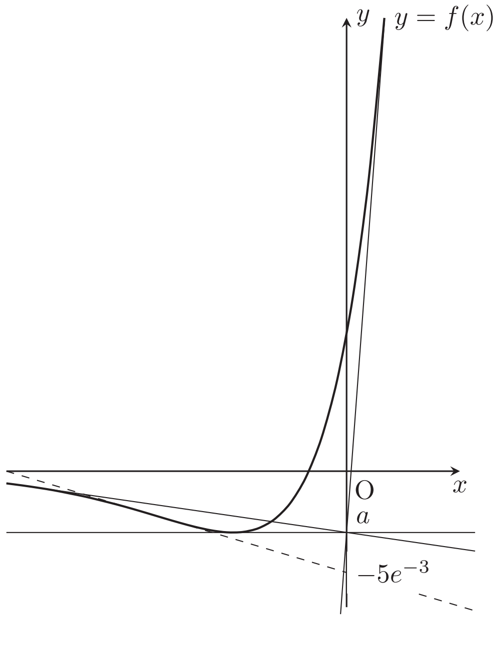
また，変曲点における接線を求めて

$$y = -e^{-3}x - 5e^{-2}.$$

よって，グラフより，y 軸上の点から $y = f(x)$ に引ける接線の本数は

$$\begin{cases} 1 < a \text{ のとき} & 0 \text{ 本} \\ a = 1,\ a < -\dfrac{5}{e^3} \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \\ a = -\dfrac{5}{e^3},\ 0 \leqq a < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \\ -\dfrac{5}{e^3} < a < 0 \text{ のとき} & 3 \text{ 本} \end{cases}$$

$-5e^{-3} < a < 0$ のときの図



講評

Ⅰ （やや易）

小問が 3 題あり，それぞれが誘導がついた問題になっている．計算が重いものもあるが，誘導が丁寧で，途中で進む方向を見誤ることも少ないだろう．順天堂大学の受験生にとっては易しい部類の問題だと思う．ここで得点をしっかり稼ぎたい．

Ⅱ （やや難）

順天堂大学特有の形式だろう．立体の体積の微小変化量から表面積を計算しようという設問なのだが，「微分すると回転体の側面積が得られる」と書いてあるので，意味が解らなくても，とりあえず誘導に乗れば答えが出るようになっている．後半では，どの立体の体積を微分すれば，どこの部分の面積が出るのか？ を考えなければならない．慣れていないと差がついただろう．

Ⅲ （易）

証明問題は典型的なもの．(1) では「不等式が成り立つ」と書いてあり証明する必要がない．極限のはさみうちの原理を用いる部分だけ示せばよいので，知っていれば簡単に答えが出る．(2) もごく基本的な内容．ここは落とせない．

難易度は，近年では最も易しかったと言ってよい．計算量もそれほど多くなく，問題集などに載っている基本問題が多く並んでおり，高得点勝負になることは必至である．大問 II 後半でつまずいた可能性があるが，順天堂を目指す受験生であれば，ここも乗り切りたいところである．1 次突破ラインは 70 %前後と予想される．