解答速報

慶應義塾大学医学部　数学

2020年 2月19日実施

［Ⅰ］ **以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．**

(1)　座標空間に3点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ a)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ b)$ をとり，O，A，B によって定められる平面を α とする，ただし，$a>0$，$b>0$ とする．平面 α と xy 平面との交線を ℓ とすると，ℓ は O を通り，ベクトル

$\vec{u}=\left(1,\ \boxed{(あ)}\ ,\ 0\right)$ に平行な直線である．また平面 α と xy 平面のなす角を θ $\left(ただし，0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$\cos\theta=\boxed{(い)}$ である．

(2)　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ は $x=\boxed{(う)}$ において最大値をとる．曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=\boxed{(う)}$ および x 軸で囲まれた図形 D の面積は $\boxed{(え)}$ である．また，図形 D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は $\boxed{(お)}$ である．

(3)　x，y を実数，i を虚数単位として $z=x+yi$ により複素数 z に対応する座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を $\mathrm{P}(z)$ または単に z と表す．方程式 $3x-4y+1=0$ で表される直線を ℓ とする．複素数 α を $\alpha=\boxed{(か)}$ とおくと，ℓ の方程式は $\alpha z+\overline{\alpha}\,\overline{z}+1=0$ と書かれる．z が ℓ 上にあるとき $w=\dfrac{1}{z}$ は複素数 $\boxed{(き)}$ を中心とする半径 $\boxed{(く)}$ の円周上にある．また，複素数 β を $\beta=\boxed{(け)}$ とおくと，ℓ は2点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を結ぶ線分の垂直二等分線である．ℓ 上にあって $\mathrm{O}(0)$ に最も近い点を $\mathrm{P}_0(z_0)$ とするとき，ℓ 上の点 $\mathrm{Q}_1(z_1)$，$\mathrm{Q}_2(z_2)$ を，$\angle\mathrm{P}_0\mathrm{OQ}_1=\angle\mathrm{P}_0\mathrm{OQ}_2=\dfrac{\pi}{4}$ であり，かつ z_1 の実部が z_2 の実部より小さくなるように定めると $z_1=\boxed{(こ)}$，$z_2=\boxed{(さ)}$ となる．

【解説】

(1)　平面 α の法線ベクトルの1つを $\vec{n}$ とする．

$\vec{n}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ a)$ に垂直なので，内積を考えることで $\vec{n}=(a,\ t,\ -1)$ (t: 実数) と書ける．

さらに，$\vec{n}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 1,\ b)$ とも垂直であることから

$$a\cdot 0+t\cdot 1+(-1)\cdot b=0 \iff t=b$$

よって　$\vec{n}=(a,\ b,\ -1)$

ここで，平面 α 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=0$ であることから

$$ax+by-z=0\ (\text{平面 }\alpha\text{ の方程式})$$

この式に $z=0$ を代入することで，平面 α と xy 平面の交線 ℓ を得ることができる

$$\ell:\ ax+by=0\ (z=0)\quad \therefore\quad \ell:\ y=-\frac{a}{b}x\ (z=0)$$

これは，$\vec{u}=\left(1,\ -\dfrac{a}{b},\ 0\right)$ に平行な直線である．

平面 α の法線ベクトル $\vec{n}$ と xy 平面の法線ベクトル $\vec{m}$ のなす角を p $(0\leqq p\leqq\pi)$ とすると

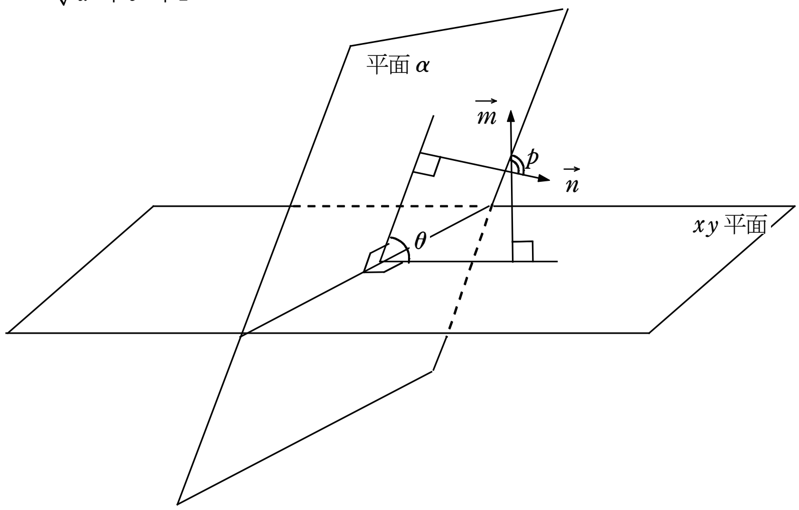
$\vec{n}=(a,\ b,\ -1)$，$\vec{m}=(0,\ 0,\ 1)$ から　$\cos p=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}<0$

$\dfrac{\pi}{2}<p<\pi$ であることから，$\theta=\pi-p$ である．

よって

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos(\pi-p)\\&=-\cos p\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

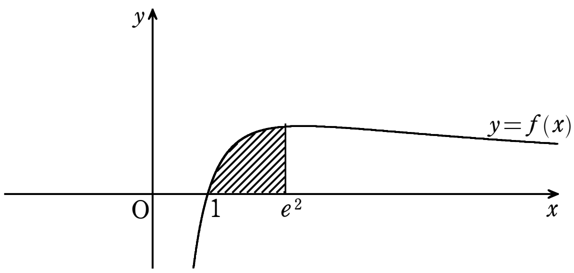


(2)　$f'(x)=\dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$ から，$f(x)$ の増減表を作ると，以下のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$

$x=e^2$ のとき，$f(x)$ は最大値をとる．

次に，$y=f(x)$ と直線 $x=e^2$ および，x 軸で囲まれる図形 D は，次の斜線部分となる．



ゆえに，D の面積を S とすると

$$S=\int_1^{e^2} f(x)\,dx=\int_1^{e^2}\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\Big[2\sqrt{x}\log x\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=4e-2\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=4e-4\Big[\sqrt{x}\Big]_1^{e^2}$$

$$=4e-4(e-1)$$

$$=4$$

D を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_1^{e^2}\{f(x)\}^2dx=\int_1^{e^2}\frac{(\log x)^2}{x}dx$$

$$=\int_1^{e^2}(\log x)^2(\log x)'dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(\log x)^3\Big]_1^{e^2}$$

$$=\frac{8}{3}$$

ゆえに　$V=\frac{8}{3}\pi$

(3)　$z=x+yi$ から，$\overline{z}=x-yi$ であるから　$x=\frac{z+\overline{z}}{2}$，$y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

これを $3x-4y+1=0$ に代入して整理すると

$$\left(\frac{3}{2}+2i\right)z+\left(\frac{3}{2}-2i\right)\overline{z}+1=0$$

を得る.

ゆえに　$\alpha=\frac{3}{2}+2i$

次に，$\alpha z+\overline{\alpha}\cdot\overline{z}+1=0$ に $z=\frac{1}{w}$（$w\neq 0$）を代入する.

$$\frac{\alpha}{w}+\frac{\overline{\alpha}}{\overline{w}}+1=0$$

$$\Longleftrightarrow\ w\overline{w}+a\overline{w}+\overline{a}w=0$$

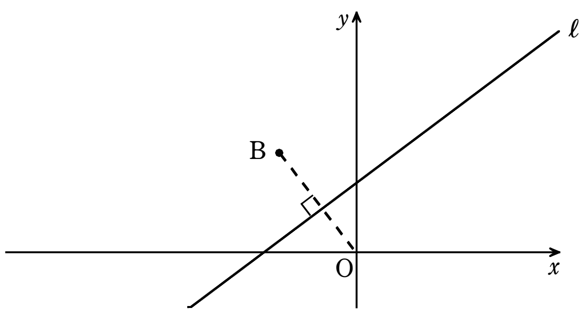
$$\Longleftrightarrow\ (w+\alpha)(\overline{w}+\overline{\alpha})=|\alpha|^2$$

$$\Longleftrightarrow\ |w+\alpha|^2=|\alpha|^2$$

$$\Longleftrightarrow\ |w+\alpha|=|\alpha|$$

よって，w は，中心 $-\alpha=-\frac{3}{2}-2i$，　半径 $|\alpha|=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$ の円周上にある.（ただし，点 0 は除く）

xy 座標に ℓ: $3x-4y+1=0$ を図示する.



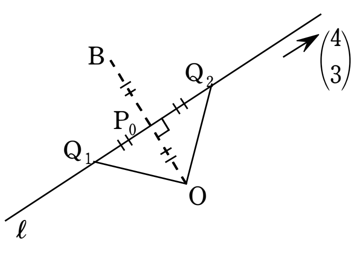
$\beta=a+bi$　（a，b 実数）とすると，xy 座標においてB$(a,\ b)$ と表せる.

線分 OB の垂直二等分線が直線 ℓ であることから,

$$\begin{cases}3\cdot\frac{a}{2}-4\cdot\frac{b}{2}+1=0\\ b=-\frac{4}{3}a\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}4b=3a+2\\ 3b=-4a\end{cases}$$

これを解くと　$(a,\ b)=\left(-\frac{6}{25},\ \frac{8}{25}\right)$　$\therefore$　$\beta=-\frac{6}{25}+\frac{8}{25}i$.

次に，P_0，Q_1，Q_2の位置関係を考える.



$\mathrm{OP_0}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}\cdot 10=\frac{1}{5}$ より，$\mathrm{OP_0}=\mathrm{P_0Q_1}=\mathrm{P_0Q_2}=\frac{1}{5}$

また，ℓ の方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_1}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって　$z_1 = -\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_2}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

よって　$z_2 = \frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$.

［Ⅱ］ **以下の文章の空欄に適切な式を入れて文章を完成させなさい．ただし，記入する式は，文字 n についての整式で，可能な限り因数分解されたものとする．**

n を 2 以上の自然数とする．1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが用意されている．まず A 君がこの中から無作為に同時に 2 枚のカードを引いてその番号を記録し，カードを 2 枚とももとに戻した後，B 君が無作為に同時に 2 枚のカードを引いてその番号を記録する．

(1)　A 君，B 君のうち少なくとも 1 人が番号 1 のカードを引く確率は $\dfrac{\boxed{(あ)}}{\boxed{(い)}}$ である．

(2)　A 君と B 君が共通に引くカードが 1 枚だけである確率は $\dfrac{\boxed{(う)}}{\boxed{(え)}}$ である．

(3)　A 君，B 君のうち 1 人のみが 2 以下の番号のカードを 1 枚以上引く確率は $\dfrac{\boxed{(お)}}{\boxed{(か)}}$ である．

(4)　A 君が記録した番号の大きい方と，B 君が記録した番号の大きい方が一致する確率は $\dfrac{\boxed{(き)}}{\boxed{(く)}}$ である．

(5)　A 君が記録した番号の小さい方が，B 君が記録した番号の大きい方以上である確率は $\dfrac{\boxed{(け)}}{\boxed{(こ)}}$ である．

【解説】

(1)　余事象を考えると，2 人とも番号 1 以外のカードから 2 枚ずつ引いた場合である．したがって求める確率は，

$$1-\left(\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)^2=\frac{4(n-1)}{n^2}.$$

(2)　$n\geqq 3$ で考える．

共通に引くカードの選び方が ${}_n\mathrm{C}_1=n$ 通り．このとき，A 君は，この共通カード以外からさらに 1 枚選び，B 君は共通に引くカードと A 君が引いたカード以外からさらに 1 枚引くので，求める確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}=\frac{4(n-2)}{n(n-1)}.\quad（n=2\ でも成立する．）$$

(3)　$n\geqq 4$ で考える．

(ア)　A 君が 2 以下の番号のカードを 1 枚引き，B 君が引かない場合

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}.$$

(イ)　A 君が 2 以下のカードを 2 枚引き，B 君が引かない場合

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}.$$

(ア)(イ) は互いに排反である．また，B 君が 1 枚以上引く場合も考えるので，求める確率は，

$$\left\{\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}\right\}\times 2=\frac{4(2n-3)(n-2)(n-3)}{n^2(n-1)^2}.\quad（n=2,\ 3\ でも成立する．）$$

(4)　2 人が記録した番号の大きい方が k の場合を考える．

このとき，A 君，B 君ともに，1 以上 $k-1$ 以下の番号のカードを 1 枚引いているので，$k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots n$ としてそのときの確率は

$$\left(\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)^2.$$

したがって，求める確率は，

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)^2=\sum_{k=2}^{n}\frac{4}{n^2(n-1)^2}(k-1)^2=\frac{4}{n^2(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=\frac{2(2n-1)}{3n(n-1)}.$$

(5)　$n \geqq 3$ で考える．

A 君が記録した番号を小さい順に a_1，a_2 とおき，B 君が記録した番号を小さい順に b_1，b_2 とおく．条件を満たすのは，

$$1 \leqq b_1 < b_2 \leqq a_1 < a_2 \leqq n.$$

ここで，$a_1 = k$ ($k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n-1$) となる場合の確率を考える．

A 君の引き方は，番号 k のカードと番号が k よりも大きなカード一枚を引くので，$1\cdot(n-k)$ 通り．B 君の引き方は，番号が k 以下のカードの中から 2 枚を引くので，${}_k\mathrm{C}_2$ 通り．したがって，その確率は，

$$\frac{(n-k)_k\mathrm{C}_2}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}=\frac{2(n-k)k(k-1)}{n^2(n-1)^2}=\frac{2}{n^2(n-1)^2}\{(n+1)k(k-1)-(k+1)k(k-1)\}$$

よって，$k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n-1$ のときを考えて，

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{2}{n^2(n-1)^2}\{(n+1)k(k-1)-(k+1)k(k-1)\}=\frac{2}{n^2(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-2}\{(n+1)k(k+1)-k(k+1)(k+2)\}.$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-2}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n.$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n-2}k(k+1)(k+2)\{(k+3)-(k-1)\}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-2}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

$$=\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

であるから，

$$\frac{2}{n^2(n-1)^2}\left\{\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n(n+1)-\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)\right\}=\frac{(n+1)(n-2)}{6n(n-1)}.$$

（$n=2$ でも成立する．）

【別解】

A 君が記録した番号を小さい順に a_1，a_2 とおき，B 君が記録した番号を小さい順に b_1，b_2 とおく．条件を満たすのは，

$$1 \leqq b_1 < b_2 \leqq a_1 < a_2 \leqq n.$$

$$\therefore\ \ 1 \leqq b_1 < b_2 < a_1+1 < a_2+1 \leqq n+1.$$

これを満たす (a_1, a_2, b_1, b_2) の組み合わせの個数は

${}_{n+1}\mathrm{C}_4$ (通り)

よって，求める確率は

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_4}{({}_n\mathrm{C}_2)^2}=\frac{(n+1)(n-2)}{6n(n-1)}.$$

［Ⅲ］ **以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい.**

関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$，$g(x)=\dfrac{1}{\tan^2 x}$ と定める.

(1) 定数 a を $a=\boxed{（あ）}$ と定めると，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=af(2x)$$

が成り立つ.

(2) 自然数 n に対して

$$S_n=\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right),\quad T_n=\sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

とおく．このとき S_1，S_2，S_3 の値を求めると

$$S_1=\boxed{（い）},\quad S_2=\boxed{（う）},\quad S_3=\boxed{（え）}$$

である．また S_n と S_{n+1} の間には $S_{n+1}=\boxed{（お）}$ の関係がある．このことから，S_n を n の式で表すと $S_n=\boxed{（か）}$ となる．また T_n を n の式で表すと $T_n=\boxed{（き）}$ である．したがって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して $\sin\theta<\theta<\tan\theta$ であることに注意すると

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2}=\boxed{（く）}$$

がわかる.

【解説】

(1) $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}=4f(2x)$ より，$a=4$.

(2) $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{1} f\left(\frac{k\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=2$.

また，(1) の結果を用いて（式の対応関係は -- で示されている．）

$$S_2=\sum_{k=1}^{3} f\left(\frac{k\pi}{8}\right)=f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{2\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=4f\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{2\pi}{8}\right)=4S_1+f\left(\frac{\pi}{4}\right)=10\ .$$

$$S_3=\sum_{k=1}^{7} f\left(\frac{k\pi}{16}\right)=f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{2\pi}{16}\right)+f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{4\pi}{16}\right)+f\left(\frac{5\pi}{16}\right)+f\left(\frac{6\pi}{16}\right)+f\left(\frac{7\pi}{16}\right)$$

$$=4\left\{f\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)+f\left(2\cdot\frac{2\pi}{16}\right)+f\left(2\cdot\frac{3\pi}{16}\right)\right\}+f\left(\frac{4\pi}{16}\right)=4S_2+f\left(\frac{\pi}{4}\right)=42\ .$$

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)=f\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2^{n+2}}\right)+\cdots+f\left(\frac{2^n\pi}{2^{n+2}}\right)+\cdots+f\left(\frac{(2^{n+1}-2)\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$=4\left\{f\left(2\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(2\cdot\frac{2\pi}{2^{n+2}}\right)+\cdots\right\}+f\left(\frac{2^n\pi}{2^{n+2}}\right)=4\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4S_n+2\ .$$

$S_{n+1}=4S_n+2$ より

$$S_{n+1}+\frac{2}{3}=4\left(S_n+\frac{2}{3}\right)\qquad \therefore\ S_n+\frac{2}{3}=\left(S_1+\frac{2}{3}\right)\cdot 4^{n-1}\iff S_n=\frac{2(4^n-1)}{3}\ .$$

ここで，$g(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$ であるので，$g(x)=f(x)-1$ より

$$T_n=\sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)=\sum_{k=1}^{2^n-1}\left\{f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)-1\right\}=S_n-(2^n-1)$$

したがって，$T_n=S_n-2^n+1$ より

$$T_n=\frac{2\cdot4^n-3\cdot2^n+1}{3}\ .$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\sin x<x<\tan x$ より

$$\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\sin^2 x}$$

$x=\dfrac{k\pi}{2^{n+1}}$ （$k=1,2,3,\cdots,2^n-1$）として

$$\frac{1}{\tan^2\dfrac{k\pi}{2^{n+1}}}<\frac{4^{n+1}}{k^2\pi^2}<\frac{1}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2^{n+1}}}$$

$k=1,2,3,\cdots,2^n-1$ として足し合わせると

$$T_n<\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{4^{n+1}}{k^2\pi^2}<S_n \iff \frac{T_n}{4^{n+1}}\pi^2<\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2}<\frac{S_n}{4^{n+1}}\pi^2$$

ここで

$$\frac{T_n}{4^{n+1}}\pi^2=\frac{2-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{3\cdot 4}\pi^2 \to \frac{\pi^2}{6} \quad (n\to\infty)$$

$$\frac{S_n}{4^{n+1}}\pi^2=\frac{2-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{3\cdot 4}\pi^2 \to \frac{\pi^2}{6} \quad (n\to\infty)$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\ .$$

［IV］ 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．また設問 (4) に答えなさい．

$b>0,\ c>0$ として関数 $f(x)=b\left(1-\dfrac{x^2}{c}\right)\ (0\leqq x\leqq\sqrt{c})$ を考える．また曲線 $y=f(x)$ および x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を A とする．

(1) A を一定に保つとき，b を A と c の式で表すと $b=$ $\boxed{（あ）}$ となる．以下この式により文字 b を消去する．

(2) 曲線 $y=f(x)\ (0\leqq x\leqq\sqrt{c})$ 上の点 $(x,\ f(x))$ と原点 O の距離を $r(x)$ で表す．$c\geqq$ $\boxed{（い）}$ のとき関数 $r(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ において増加し，$0<c<$ $\boxed{（い）}$ のとき関数 $r(x)$ は 1 点 x_0 (ただし，$0<x_0<\sqrt{c}$) において最小値 r_0 をとる．x_0 と r_0 を A と c の式で表すと $x_0=$ $\boxed{（う）}$，$r_0=$ $\boxed{（え）}$ である．

(3) c が $0<c<$ $\boxed{（い）}$ を満たしつつ変化するとき，r_0 は $c=$ $\boxed{（お）}$ において最大値をとる．$c=$ $\boxed{（お）}$ のとき，原点 O と点 $(x_0,\ f(x_0))$ を結ぶ線分が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $\cos\theta=$ $\boxed{（か）}$ である．

(4) 曲線 $y=f(x)\ (0\leqq x\leqq\sqrt{c})$ の長さを $L(c)$ とする．一般に $s\geqq0,\ t\geqq0$ のとき $\sqrt{s}\leqq\sqrt{s+t}\leqq\sqrt{s}+\sqrt{t}$ であることを用いて

$$\lim_{c\to\infty}\frac{L(c)}{\sqrt{c}}=1,\quad \lim_{c\to+0}\sqrt{c}\,L(c)=\frac{3A}{2}$$

となることを示しなさい．

【解説】

(1) $A=\displaystyle\int_0^{\sqrt{c}} b\left(1-\frac{x^2}{c}\right)dx=\frac{2\sqrt{c}}{3}b$ より，$b=\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}$ ．

(2) $r(x)>0$ より，$r(x)$ と $\{r(x)\}^2$ の増減は一致する．

$$\{r(x)\}^2=x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{c}\right)^2\quad(\equiv g(x))$$

$$g'(x)=\frac{4b^2}{c^2}x\left(x^2+\frac{c^2}{2b^2}-c\right)$$

$0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ において，$g'(x)\geqq0$ となる条件を考えると，$x^2+\dfrac{c^2}{2b^2}-c\geqq0$ となる条件を考えて

$\dfrac{c^2}{2b^2}-c\geqq0$ $\quad\therefore$ $c>0$ に注意して，$c\geqq2b^2$ となり，このとき，$g(x)\,(\,r(x))$ は単調に増加する．

したがって，$c\geqq2b^2$ に $b=\dfrac{3A}{2\sqrt{c}}$ を代入して，$c\geqq\dfrac{3A}{\sqrt{2}}$ ．

また，$g'(\sqrt{c})>0$ に注意して，$\dfrac{c^2}{2b^2}-c<0$，つまり，$0<c<\dfrac{3A}{\sqrt{2}}$ のとき，$g(x)$ の増減は次のようになる．

x	0		$\sqrt{-\dfrac{c^2}{2b^2}+c}$		$\sqrt{c}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

したがって，$g(x)\,(\,r(x))$ が最小となる x の値は

$$x_0=\sqrt{-\frac{c^2}{2b^2}+c}=\sqrt{-\frac{2c^3}{9A^2}+c}\ .$$

また，このとき，

$$r_0=\sqrt{g(x_0)}=\sqrt{{x_0}^2+b^2\left(1-\frac{{x_0}^2}{c}\right)^2}=\sqrt{-\frac{c^2}{2b^2}+c+b^2\left(\frac{c}{2b^2}\right)^2}=\sqrt{-\frac{c^3}{9A^2}+c}\ .$$

(3) $r_0>0$ より，r_0 と ${r_0}^2$ の増減は一致する．また，A が定数であることに注意する．

$${r_0}^2=-\frac{c^3}{9A^2}+c\quad(\equiv h(c))$$

$$h'(c)=-\frac{c^2}{3A^2}+1$$

$h'(c)=0$ とすると，$c=\sqrt{3}\,A$ であり

$$\frac{3A}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}\,A=\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{3}\right)A>0$$

であることから，$h(x)$ の増減は次のようになる.

c	(0)		$\sqrt{3}\,A$		$\left(\frac{3A}{\sqrt{2}}\right)$
$h'(c)$		$+$	0	$-$	
$h(c)$		↗		↘	

したがって，$h(x)$（r_0）が最大となる c の値は

$$c=\sqrt{3}\,A\ .$$

このとき，(2) より，$x_0=\sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$ ，$r_0=\sqrt{\frac{2A}{\sqrt{3}}}$ より

$$\cos\theta=\frac{x_0}{r_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

(4)　$f'(x)=-\frac{2bx}{c}$ より

$$L(c)=\int_0^{\sqrt{c}}\sqrt{1+\left(-\left(\frac{2bx}{c}\right)^2\right)}\,dx=\int_0^{\sqrt{c}}\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{c^2}}\,dx$$

ここで，与不等式で，$s=1$，$t=\frac{4b^2x^2}{c^2}$ と考えて

$$\sqrt{1}\leqq\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{c^2}}\leqq\sqrt{1}+\sqrt{\frac{4b^2x^2}{c^2}}\qquad\therefore\quad 1\leqq\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{c^2}}\leqq 1+\frac{2bx}{c}$$

$0\leqq x\leqq\sqrt{c}$ で積分して

$$\sqrt{c}<L(c)<\int_0^{\sqrt{c}}\left(1+\frac{2bx}{c}\right)dx\qquad\therefore\quad\sqrt{c}<L(c)<\sqrt{c}+b\quad\cdots①$$

① の両辺を $\sqrt{c}$（>0）で割ると

$$1<\frac{L(c)}{\sqrt{c}}<1+\frac{b}{\sqrt{c}}$$

$c\to\infty$ のとき，(1) より，$b\to+0$ であるので，$\displaystyle\lim_{c\to\infty}\left(1+\frac{b}{\sqrt{c}}\right)=1$

よって，はさみうちの原理から

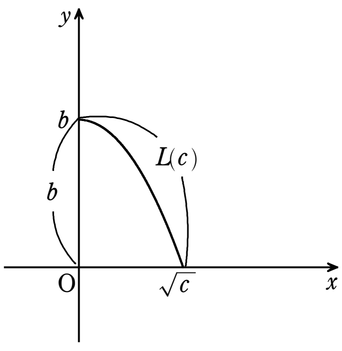
$$\lim_{c\to\infty}\frac{L(c)}{\sqrt{c}}=1\ .$$

また，① の両辺に $\sqrt{c}$（>0）をかけて

$$c<\sqrt{c}\,L(c)<c+b\sqrt{c}$$

ここで，$\sqrt{c}\,L(c)-b\sqrt{c}=\sqrt{c}\,(L(c)-b)>0$（$\because L(c)>b$）なので

$$b\sqrt{c}<\sqrt{c}\,L(c)<c+b\sqrt{c}$$



さらに，(1) より，$b\sqrt{c}=\frac{3A}{2}$ なので

$$\frac{3A}{2}<\sqrt{c}\,L(c)<c+\frac{3A}{2}$$

よって，$\displaystyle\lim_{c\to+0}\left(c+\frac{3A}{2}\right)=\frac{3A}{2}$ より，はさみうちの原理から

$$\lim_{c\to\infty}\sqrt{c}\,L(c)=\frac{3A}{2}\ .$$

※後半の極限の証明は，与不等式で $s=\dfrac{4b^2x^2}{c^2}$，$t=1$ として

$$\frac{2bx}{c} \leqq \sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{c^2}} \leqq 1+\frac{2bx}{c}$$

を利用して，前半と同じ流れで示すこともできる．

［講評］

［Ⅰ］（やや易）

慶應医学部を目指すものにとっては基本的な出題ばかりであった．ここは落とせない．

［Ⅱ］（やや易）

冷静に状況を理解できれば，どれも十分に得点できる問題である．冷静に対処したい．

［Ⅲ］（標準）

(1)の誘導の意味を理解でき，適切に使えるかが鍵であった．そこが勝負の分かれ目であったであろう．

［Ⅳ］（やや難）

考え方そのものは難しくはないが，文字が多く計算が煩雑である．中々冷静に対処するのは難しかったのではないか．

全体的にやや易化した．最低でも 70 ～ 75 ％ は欲しいところである．他の科目にもよるが，高得点勝負になると思われる．