医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

杏林大学医学部　数学

2020年 2月 3日実施

I $\boxed{ウ}$，$\boxed{カ}$，$\boxed{ケ}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ．

2 以上の整数 p に対し，p 進数を $101_{(p)}$ のように括弧のある添え字を付けて表記する．ただし，添え字のない数は 10 進数とする．

(a) 初項 $a_1=2$，公比 9 の等比数列の第 n 項 a_n $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ は，9 進法で

$$a_n=A\underbrace{BB\cdots B}_{m\text{ 桁}}{}_{(9)}\quad \left(\text{ただし，}A=\boxed{ア},\ B=\boxed{イ},\ m=\boxed{ウ}\right)$$

と表記され，3 進法では，

$$a_n=C\underbrace{DD\cdots D}_{l\text{ 桁}}{}_{(3)}\quad \left(\text{ただし，}C=\boxed{エ},\ D=\boxed{オ},\ l=\boxed{カ}\right)$$

と表される．また，初項から第 n 項までの和は，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=EFE\cdots FE_{(3)}\quad \left(\text{ただし，}E=\boxed{キ},\ F=\boxed{ク}\right)$$

と $\boxed{ケ}$ 桁の 3 進数で表される．

$\boxed{ウ}$，$\boxed{カ}$，$\boxed{ケ}$ の解答群

① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $2n-2$　⑤ $2n-1$　⑥ $2n$　⑦ $2n+1$　⑧ $2n+2$

(b) 初項が $b_1=\boxed{コ}$，公比が $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ の等比数列 $\{b_n\}$ は，4 進法で

※ 大問 3 以降は 2/4（火）に公開いたします。

$$b_1=13_{(4)},\ b_2=0.\boxed{スセ}_{(4)},\ b_3=0.013_{(4)},\ b_4=0.000\boxed{スセ}_{(4)},\ \cdots$$

と表される．この数列の初項から第 5 項までの和を $p=\boxed{ソ}$ 進数で表すと

$$\sum_{k=1}^{5}b_k=111.\underbrace{11\cdots1}_{\text{小数点以下 }j\text{ 桁}}{}_{(p)}\quad \left(\text{ただし，}j=\boxed{タチ}\right)$$

となる．

【解説】

(a)
$$a_n=2\cdot 9^{n-1}=2\cdot 9^{n-1}+0\cdot 9^{n-2}+0\cdot 9^{n-3}+\cdots+0\cdot 9^0$$
$$=2\underbrace{000\cdots0}_{n-1\text{ 桁}}{}_{(9)}.$$

したがって，$A=2$，$B=0$，$m=n-1$（①）．

また，これを変形すると，

$$a_n=2\cdot 9^{n-1}=2\cdot 3^{2n-2}=2\underbrace{000\cdots0}_{2n-2\text{ 桁}}{}_{(3)}$$

であるから，$C=2$，$D=0$，$l=2n-2$（④）．

さらに，初項から第 n 項までの和を求めると，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\cdot\sum_{k=1}^{n} 9^{k-1} = 2\cdot\sum_{k=1}^{n}(3^2)^{k-1} = 2\cdot 3^{2n-2} + 2\cdot 3^{2n-4} + \cdots + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^0$$

これを3進数で表すと，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{202020\cdots202}_{2n-1\text{ 桁}}{}_{(3)}$$

となるので，$E=2$，$F=0$，$2n-1$ 桁(⑤).

(b) $b_1 = 13_{(4)} = 1\cdot 4^1 + 3\cdot 4^0 = 7.$

また，$b_2>0$ であるから公比は正であり，$b_3 = 0.013_{(4)}$ より，公比 $r^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$. したがって，$r = \frac{1}{8}$.

このとき，

$$b_2 = 7\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{8} = \frac{14}{4^2} = \frac{3\cdot 4+2}{4^2} = 3\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4^2}$$

であるから，$b_2 = 0.32_{(4)}$.

また，

$$S = \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} 7\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} = \frac{7\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{8}} = 8 - \left(\frac{1}{8}\right)^4.$$

S を p 進数で表して整数部分が3桁となる時を考える．$p \geqq 3$ ならば，$S \geqq p^2 \geqq 3^2 = 9$ となり不適．ゆえに $p=2$.

このとき，

$$S = 2^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 1000_{(2)} - \underset{\text{小数第 12 位}}{0.00\cdots01_{(2)}} = 111.\underbrace{11\cdots11}_{\text{小数点以下12 桁}}{}_{(2)}$$

と表すことができるので，$j=12$.

Ⅱ $\boxed{ソ}$，$\boxed{ニ}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ．

点 O を原点とする座標空間に 3 点 A (2 , 0 , 1)， B(0 , 3 , 1)， C (0 , 0 , 1) がある．

(a) $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}\sqrt{\boxed{エ}}$ であり，△AOB の面積は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ となる．また，点 C から平面 AOB に下した垂線の長さは $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．

(b) 点 C と点 E(2 , 3 , 0) を結ぶ直線が平面 AOB と交わる点を P とすると，線分 CE と CP の長さはそれぞれ

$$\mathrm{CE}=\sqrt{\boxed{ケコ}}\ ,\qquad \mathrm{CP}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\sqrt{\boxed{スセ}}$$

となる．また，点 P は △AOB の $\boxed{ソ}$ である．

(c) 線分 OC の中点を M とし，点 M と点 F (2 , 3 , 1) を結ぶ直線が平面 AOB と交わる点を Q とすると，

$$\mathrm{MF}=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\sqrt{\boxed{ツテ}}\ ,\qquad \mathrm{MQ}=\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}\times\mathrm{MF}$$

となる．また，点 Q は △AOB の $\boxed{ニ}$ である．

(d) 四面体 OABE の表面および内部の領域を S，四面体 OABF の表面および内部の領域を T とする． $S\cap T$ で表される 2 つの領域の共通部分の立体の表面は $\boxed{ヌ}$ 面体であり， $S\cup T$ で表される 2 つの領域を合わせてできる立体の表面は $\boxed{ネ}$ 面体となる．

$\boxed{ソ}$，$\boxed{ニ}$ の解答群

① 外心　② 内心　③ 重心　④ 外心，内心，重心以外の点

【解説】

A(2, 0, 1)，B(0, 3, 1)，C(0, 0, 1)

(a)
$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{10}\sqrt{2}.$$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2(\sqrt{10})^2-1^2}=\frac{7}{2}.$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直なベクトルの一つとして $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ を定める．（これは，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{n}=0$ を満たす）

このとき，平面 OAB 上の点 R $(x,\ y,\ z)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=0$ が成り立つ．すなわち，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}=0 \iff 3x+2y-6z=0.$$

これが平面 OAB の方程式である．いま，点 C と平面 OAB との距離 d は，

$$d=\frac{|3\cdot0+2\cdot0-6\cdot1|}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}}=\frac{6}{7}.$$

※ 四面体 OABC の体積に注目して， $\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{CO}\times\dfrac{1}{3}=\triangle\mathrm{AOB}\times d\times\dfrac{1}{3}$ から求めてもよい．

(b)
$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\ |\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}.$$

線分 CE 上の点 P を実数 t を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\overrightarrow{\mathrm{CE}}$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\begin{pmatrix}2t\\3t\\1-t\end{pmatrix}$$

この点 P が平面 OAB 上にあるとき，

$$3\cdot 2t+2\cdot 3t-6\cdot(1-t)=0 \iff t=\frac{1}{3}.$$

したがって，CP:CE=1:3 であり，$\mathrm{CP}=\frac{1}{3}\sqrt{14}$.

このとき点 P の座標は $\left(\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$ であり，△OAB の重心に一致することがわかる.

(c) OC の中点なので，$\mathrm{M}\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$. このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{MF}}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ |\overrightarrow{\mathrm{MF}}|=\sqrt{2^2+3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{53}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{MF}}$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+s\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\begin{pmatrix}2s\\3s\\\frac{1+s}{2}\end{pmatrix}.$$

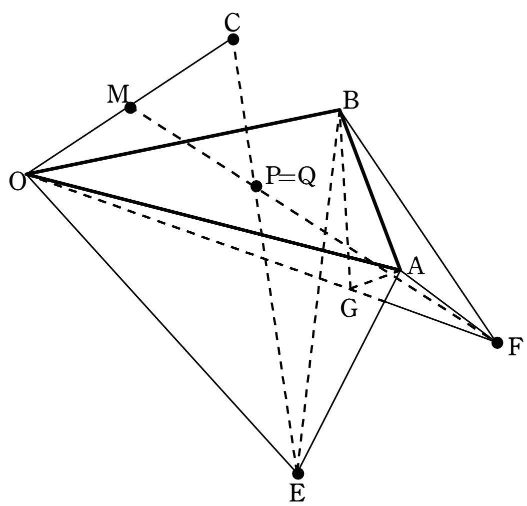
この点 Q が平面 OAB 上にあるとき，

$$3\cdot 2s+2\cdot 3s-6\cdot\frac{1+s}{2}=0 \iff s=\frac{1}{3}.$$

したがって，点 Q は MQ:MF=1:3 であり，$\mathrm{MQ}=\frac{1}{3}\times\mathrm{MF}$.

このとき点 Q の座標は $\left(\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$ であり，△OAB の重心に一致することがわかる.

(d)



線分 OF と平面 ABE との交点を G とおく．$S\cap T$ で表される図形は，4 面体 OABG である.
また，$S\cup T$ で表される図形は，四面体 OABE に，四面体 ABFG を加えた形であり，その表面は 7 面体である.

Ⅲ　$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ.

実数を定義域とする関数 $f(x)=2x^2-7$，$g(x)=-2x^2-8x+7$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを曲線 C，$y=g(x)$ のグラフを曲線 D とする．$g(t)\geqq f(t)$ を満たす t に対し，点 $(t, g(t))$ における曲線 D の接線を l とする.

(a)　直線 l の式は

$$y=(\boxed{\text{アイ}}-\boxed{\text{ウ}})x+\boxed{\text{エ}}t^2+\boxed{\text{オ}}$$

で与えられる．直線 l と曲線 C の共有点をP，Qとし，P，Qの x 座標をそれぞれ α, β $(\alpha<\beta)$ とする．点Pおよび点Qにおける曲線 C の接線の交点をRとするとき，点Rの座標は α, β を用いて，

$$\left(\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \boxed{\text{ク}}\times\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}\right)$$

と表される.

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

① α　② β　③ $\alpha+\beta$　④ $\beta-\alpha$

⑤ $\alpha\beta$　⑥ $\dfrac{\alpha}{\beta}$　⑦ $\dfrac{\beta}{\alpha}$　⑧ $\alpha^2+\beta^2$

⑨ $\beta^2-\alpha^2$

(b)　三角形PQRの面積 S_1 は

$$S_1=\boxed{\text{サ}}\left(\sqrt{\boxed{\text{シ}}t^2+\boxed{\text{ス}}t+\boxed{\text{セソ}}}\right)^{\boxed{\text{タ}}}$$

と表される.

S_1 は $t=\boxed{\text{チツ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{テトナ}}$ をとる.

(c)　曲線 C と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とすると,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

が成り立つ.

【解説】

$$f(x)=2x^2-7,\quad g(x)=-2x^2-8x+7.$$

(a)　$y=g(x)$ 上の点 $(t,\ g(t))$ におえる曲線 D の接線の方程式は,

$$l:\ y-g(t)=g'(t)(x-t) \iff y=(-4t-8)x+2t^2+7.$$

l と C との交点の座標は，連立方程式の解であり,

$$2x^2-7=(-4t-8)x+2t^2+7$$
$$\iff 2x^2+(2t+4)x-t^2-7=0$$
$$\iff x=-(t+2)\pm\sqrt{2t^2+4t+11}.$$

よって，$\alpha=-(t+2)-\sqrt{2t^2+4t+11}$，$\beta=-(t+2)+\sqrt{2t^2+4t+11}$ である.

また，点Pにおける曲線 C の接線の方程式は,

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \iff y=4\alpha x-2\alpha^2-7.$$

同様に，点Qにおける接線の方程式は $y=4\beta x-2\beta^2-7$．この2接線の交点を求めると,

$$(x,\ y)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ 2\alpha\beta-7\right).$$

(b)　△PQRの面積 S_1 は，$f(x)$ の x^2 の係数が2であることに注意して,

$$S_1=2\cdot\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2t^2+4t+11}\right)^3=4\left(\sqrt{2t^2+4t+11}\right)^3.$$

さらに変形すると，

$$S_1 = 4\left\{\sqrt{2(t+1)^2+9}\right\}^3$$

となるので，$t=-1$ のときに最小値 $4\cdot3^3=108$ をとる．

(c)
$$S_2 = 2\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

と求まるので，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{2}$．

Ⅳ $\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ の解答はそれぞれ該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ.

座標平面上に点 A (0 , 6) があり，原点 O を中心とする半径 4 の円周を C とする.

(a) 円周 C 上の動点 P は媒介変数 t を用いて $\left(\boxed{\text{ア}}\cos t, \boxed{\text{イ}}\sin t\right)$ と表される.

2 点 A，P の中点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ウ}}\cos t , \boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}\sin t\right)$$

である.

(b) 線分 AP の垂直 2 等分線上の点 (x , y) は，次式を満たす.

$$\left(\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}-\sin t\right)y=x\cos t+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

(c) 動点 P が円周 C 上を 1 周動くとき，線分 AP の垂直二等分線が通過する領域は

$$\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x^2+\frac{\left(y-\boxed{\text{ス}}\right)^2}{\boxed{\text{セ}}}\boxed{\text{ソ}}1$$

を満たす点 (x , y) の集合であり，$\boxed{\text{タ}}$ を表す．この領域の境界を表す 2 次曲線の焦点は，原点 O と

点 $\left(\boxed{\text{チ}} , \boxed{\text{ツ}}\right)$ である.

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

① $=$　　② $>$　　③ $<$　　④ $\geqq$　　⑤ $\leqq$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

① 放物線を境界とし，その焦点を含む領域
② 放物線を境界とし，その焦点を含まない領域
③ だ円を境界とし，その焦点を含む領域
④ だ円を境界とし，その焦点を含まない領域
⑤ 双曲線を境界とし，その焦点を含む領域
⑥ 双曲線を境界とし，その焦点を含まない領域

【解説】

(a) 半径 4 の円 C 上の動点 P は，$x=4\cos t$，$y=4\sin t$ と表すことができる.

このとき，A，P の中点の座標は $(2\cos t，3+2\sin t)$ である.

(b) 線分 AP の垂直二等分線上の点を Q $(x，y)$ とおくとき，AQ=PQ より

$$\sqrt{x^2+(y-6)^2}=\sqrt{(x-2\cos t)^2+(y-2\sin t)^2}.$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}-\sin t\right)y=x\cos t+\frac{5}{2}. \quad \cdots ①$$

(c) 垂直二等分線 ① 上の点を $(X，Y)$ とおく．① を満たすような実数 t が存在する条件を考えればよい.

ここで，$\sin t=p$，$\cos t=q$ とおくとき，

$$\begin{cases} p^2+q^2=1 \\ \left(\dfrac{3}{2}-p\right)Y=Xq+\dfrac{5}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p^2+q^2=1 & \cdots ② \\ Yp+Xq-\dfrac{3}{2}Y+\dfrac{5}{2}=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

この連立方程式が実数解をもつ条件は，pq 平面上において，円 ② と直線 ③ が共有点をもつ条件に等しい．よって円の中心 $(0，0)$ と直線 ③ との距離を d とおけば，

$$d=\frac{\left|Y\cdot 0+X\cdot 0-\dfrac{3}{2}Y+\dfrac{5}{2}\right|}{\sqrt{Y^2+X^2}}\leqq 1.$$

$$\iff \frac{1}{2}|-3Y+5|\leqq\sqrt{X^2+Y^2}.$$

$$\iff \frac{1}{4}(9Y^2-30Y+25)\leqq X^2+Y^2.$$

$$\iff -\frac{1}{5}X^2+\frac{(Y-3)^2}{4}\leqq 1.$$

したがって，通過領域は $-\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{(y-3)^2}{4}\leqq 1$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合であり，双曲線を境界とし，その焦点を含まない領域を表す．また，焦点は，$\sqrt{5+4}=3$ より，$(0,3-3)$，$(0,3+3)$．つまり，原点 O と点 $(0,6)$ である．

Ⅳ 大的中 冬期特別講座-「天国への数学」

292

$f(x)$は奇関数である。

また、　$f'(x)=(2-x^2)e^{-\frac{x^2}{4}}$

$\therefore\ f''(x)=(-2x)\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}+(2-x^2)\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}\cdot\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

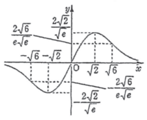
$=\dfrac{1}{2}x(x^2-6)e^{-\frac{x^2}{4}}$

であるから、$x\geq 0$における$y=f(x)$の増減・凹凸は右表のようになる。

x	0	…	$\sqrt{2}$	…	$\sqrt{6}$	…
$f'(x)$	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	↘	$\dfrac{2\sqrt{6}}{e\sqrt{e}}$	↘

さらに、

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}4\sqrt{\frac{x^2}{4}}e^{-\frac{x^2}{4}}=0$



以上より、$y=f(x)$のグラフの概形は右図のようになる。

なお、極値は、

極大値 $f(\sqrt{2})=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$，　極小値 $f(-\sqrt{2})=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$

ここで赤本の解答では時間をくい、かつ、間違えるので、1°, 2°, 3° を考え、図的に考える。

$\left(\sqrt{6},\dfrac{2\sqrt{6}}{e\sqrt{e}}\right)$における接線を求めると　$y=-4e^{-\frac{3}{2}}x+\dfrac{6\sqrt{6}}{e\sqrt{e}}$　これとx軸との交点は$\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2},0\right)$

対称性を考え、答えを出すと、

$$\begin{cases} k<-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\ \text{または}\ \dfrac{3\sqrt{6}}{2}<k\ \text{のとき 3 個} \\ k=\pm\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\ \text{のとき 2 個、}\ -\dfrac{3\sqrt{6}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\ \text{のとき 1 個} \end{cases}$$

≪ちなみに、大数の死ぬ解答・・・≫

↓

点$(p,f(p))$における$y=f(x)$の接線は、

$y=(2-p^2)e^{-\frac{p^2}{4}}(x-p)+2pe^{-\frac{p^2}{4}}$

これが点$(k,0)$を通る条件は、

$0=(2-p^2)e^{-\frac{p^2}{4}}(k-p)+2pe^{-\frac{p^2}{4}}$

$\therefore\ (2-p^2)(k-p)+2p=0$

$\therefore\ (p^2-2)k=p^3$ ・・・・・④

$p=\pm\sqrt{2}$ のとき、④は成り立たないから、④は、

$k=\dfrac{p^3}{p^2-2}\ \ (p\neq\pm\sqrt{2})$ ・・・・・⑤

と同値である。

よって、求める個数は、⑤を満たす相異なる実数pの個数に等しく、$g(p)=\dfrac{p^3}{p^2-2}$とおくと、さらにそれは、pq平面上の曲線$q=g(p)$と直線$q=k$の異なる共有点の個数に等しい。

いま、$g(p)$は奇関数であり、

$g'(p)=\dfrac{3p^2\cdot(p^2-2)-p^3\cdot 2p}{(p^2-2)^2}=\dfrac{p^2(p^2-6)}{(p^2-2)^2}$

より、$p\geq 0$における$g(p)$の増減は右表のようになる。

p	0	…	$\sqrt{2}$	…	$\sqrt{6}$	…
$g'(p)$	0	−	／	−	0	+
$g(p)$	0	↘	／	↘	$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$	↗

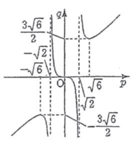
さらに、

$\displaystyle\lim_{p\to\sqrt{2}-0}g(p)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{p\to\sqrt{2}+0}g(p)=\infty$，

$\displaystyle\lim_{p\to\infty}g(p)=\infty$

以上より、曲線$q=g(p)$の概形は右図のようになるから、求める個数は、

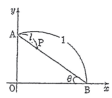
$$\begin{cases} k<-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\ \text{または}\ \dfrac{3\sqrt{6}}{2}<k\ \text{のとき 3 個} \\ k=\pm\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\ \text{のとき 2 個、}\ -\dfrac{3\sqrt{6}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\ \text{のとき 1 個} \end{cases}$$



333

Ⅰ．Pが第 1 象限にあるとき、$\angle ABO=\theta$とおくと、$A(0,\sin\theta)$，$B(\cos\theta,0)$であるから、

$P(l\cos\theta,(1-l)\sin\theta)$



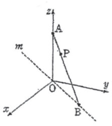
これと座標軸に関する対称性より、Pの軌跡は楕円

$\dfrac{x^2}{l^2}+\dfrac{y^2}{(1-l)^2}=1$ ・・・①

①の内部の面積　$\pi l(1-l)=\pi\left\{-\left(l-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right\}$は、$l=\dfrac{1}{2}$のとき最大値$\dfrac{1}{4}\pi$をとる。

次に、Aがz軸上、Bがxy平面を動くときを考える。Bの動く範囲をOを通る定直線m上に限定すると、Pは、Aとmを含む平面上で①と同じ楕円を描く。さらにmをOのまわりに 1 回転させると、Pの軌跡が作る立体は、①をy軸のまわりに 1 回転させてできる立体・・・②に等しい。

②の体積は、①とより、



$2\displaystyle\int_0^{1-l}\pi x^2\,dy=2\pi\int_0^{1-l}l^2\left\{1-\frac{y^2}{(1-l)^2}\right\}dy$

$=2\pi l^2\left[y-\dfrac{y^3}{3(1-l)^2}\right]_0^{1-l}=\dfrac{4}{3}\pi l^2(1-l)$ ・・・③

$f(l)=l^2(1-l)=l^2-l^3$とおくと$f'(l)=l(2-3l)$

③は$l=\dfrac{2}{3}$のとき最大値$\dfrac{4\pi}{3}f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{16}{81}\pi$をとる。

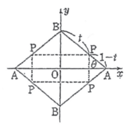
合同4長方形で考えると一瞬!

Ⅱ．(1) 右図より求める軌跡はx軸、y軸に関して対称になる（(2) (3) も同様）。

そこで、まず線分ABが第 1 象限にある場合を考える。

$\angle BAO=\theta\ (0\leq\theta\leq\pi/2)$とおくと、$A(\cos\theta,0)$，$B(0,\sin\theta)$であるから、

$P(t\cos\theta,(1-t)\sin\theta)$



これを(x,y)とおくと、$t\neq 0,\ 1$のとき

$\cos\theta=\dfrac{x}{t}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{1-t}$

よって、$\dfrac{x^2}{t^2}+\dfrac{y^2}{(1-t)^2}=1$（楕円）・・・①

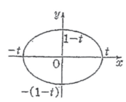
x軸、y軸に関して対称移動させたものも同じ式で表されるからこれでよい（下図）。

$t=0$のときは$P=B$なので

$x=0$，$-1\leq y\leq 1$（線分）

$t=1$のときは$P=A$なので

$y=0$，$-1\leq x\leq 1$（線分）



(2) ①において、xを固定してtを$0<t<1$の範囲で動かしたときのy^2の範囲を求める（xで表す）。

$y^2=(1-t)^2\left(1-\dfrac{x^2}{t^2}\right)$を$f(t)$とおくと、

$f'(t)=2(1-t)(-1)\left(1-\dfrac{x^2}{t^2}\right)+(1-t)^2\cdot\dfrac{2x^2}{t^3}$

$=\dfrac{2(1-t)}{t^3}(-t^3+tx^2+x^2-tx^2)=\dfrac{2(1-t)}{t^3}(x^2-t^3)$

対称性から、$x>0$とする。$y^2=f(t)>0$となるtの範囲は

$x<t\ (<1)$だから、固定するxの範囲は$0<x<1$であり、このとき増減は右表のようになる。

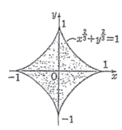
t	x	…	$x^{\frac{2}{3}}$	…	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗		↘	0

よって、y^2の範囲は

$0<y^2=f(t)\leq f\left(x^{\frac{2}{3}}\right)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3$

$y^2=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3$のとき$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$だから、

$t=0,\ 1$の場合と軸に関する対称性を考えると求める領域は右図網目部になる。



【(4) 別解】※ ① 以下

① の両辺を t で微分して

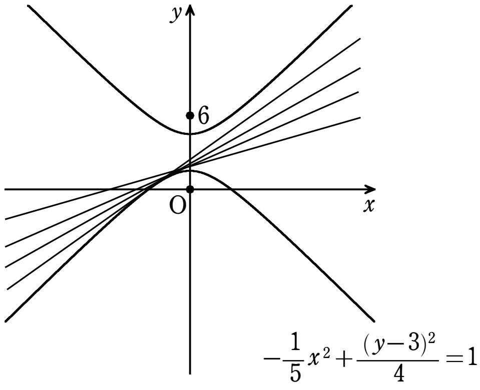
$$(-\cos t)y=(-\sin t)x \quad \cdots ④$$

① と ④ より

$$\begin{cases} \cos t=\dfrac{x(3y-5)}{2(x^2+y^2)} \\ \sin t=\dfrac{y(3y-5)}{2(x^2+y^2)} \end{cases} \cdots ⑤$$

⑤ を $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ に代入して整理すると

$$-\frac{1}{5}x^2+\frac{(y-3)^2}{4}=1 \quad \cdots ⑥$$



を得る．すなわち，t を $0\leqq t<2\pi$ で動かすとき，直線 ① は双曲線 ⑥ に接しながら動くので，通過領域は

$-\frac{1}{5}x^2+\frac{(y-3)^2}{4}\leqq 1$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合であり，双曲線を境界とし，その焦点を含まない領域を表す．

また，焦点は，$\sqrt{5+4}=3$ より，$(0,3-3)$，$(0,3+3)$．つまり，原点 O と点 $(0,6)$ である．

【講評】

$\boxed{1}$ (標準)

n 進数になれていれば計算で押し通せるが，マークシートであることを考えれば，n に具体的な数字 $n=3$ 等を代入して計算してもほとんどが求まるだろう．慌てず対処できれば取れたはずだ．

$\boxed{2}$ (やや易)

空間ベクトルの典型問題．少し図形的な考察が入っているが，(c) まではコツコツ進めれば解けるだろう．大幅原点は避けたい問題だ．

$\boxed{3}$ (やや易)

センター試験（もう終わってしまったが）の対策などでよく見るテーマである．真面目に積分計算をしていくと大変だが，放物線と交点を結んだ線分や，接線によって囲まれた面積は必須事項．難なく解き切りたい．

$\boxed{4}$ (標準)

垂直二等分線の通過領域の問題．医学部入試ではよく出てくるテーマなので解きなれている人も多いだろう．しかし，三角関数による実数 t の存在条件は経験がないと辛いか．

全体的に計算は煩雑になりがち．解けるから大丈夫だ，という気持ちではなく，多少わかりにくい方法であっても試験時間を短縮できるテクニックは身につけておかないと対処できないだろう．全体的にボリュームがあるので，全問解き終えようという考える必要はなく，解けた分量に対する正答率が合否を分けるだろう．65 %程度取れれば 1 次合格はみえるだろう．