医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

日本大学医学部（A方式）　数学

2020年 2月 8日実施

［１］ 以下の問いに答えなさい．

(1)　2 つの放物線 $y=4x^2-7x-1$ と $y=x^2-2x+1$ の共有点の x 座標の値は $x=-\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$，$\boxed{3}$ である．また，2 つの共有点をともに通る直線の方程式は $y=-\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{5}}x+\dfrac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$ である．

(2)　100 以下の自然数全体を全体集合 U とし，U の部分集合 $A,\ B,\ C$ を
$A=\{a \mid a$ は 2 の倍数$\}$，$B=\{b \mid b$ は 3 の倍数$\}$，$C=\{c \mid c$ は 5 の倍数$\}$ とする．
このとき，$n(A\cap B\cap C)=\boxed{8}$，$n(A\cap(\overline{B\cup C}))=\boxed{9}\boxed{10}$ である．ここで，$n(T)$ は集合 T の要素の個数を表す．

(3)　三角形 ABC において，各頂点 A，B，C の対辺の長さを $a,\ b,\ c$ で表すとする．いま，$\angle C=120°$，$c=8$，かつ，$a^4+c^2a^2-b^2c^2-b^4=0$ ならば，$a=\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}}\sqrt{\boxed{13}}$ である．

(4)　連立不等式

$$\begin{cases} y\leqq -\dfrac{1}{5}x+3 \\ y\geqq x-3 \\ x\geqq 0 \\ y\geqq -\dfrac{2}{3}x+2 \end{cases}$$

により囲まれる図形を D で表す．$(x,\ y)$ を D の点とするとき，$x+3y$ の最小値は $\boxed{14}$ であり，最大値は $\boxed{15}\boxed{16}$ である．

【解説】

(1)　2 曲線の共有点の x 座標は $4x^2-7x-1=x^2-2x+1$ より，$(3x+1)(x-2)=0$　　∴　$x=-\dfrac{1}{3},2$．

また，2 曲線が 2 つの共有点をもつとき，この 2 点を通る直線の方程式は 1 通りに定まり

$4x^2-7x-1-y-4(x^2-2x+1-y)=0$ より，$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$．

(2)　$A\cap B\cap C=\{x \mid x$ は 30 の倍数$\}$ なので，$n(A\cap B\cap C)=3$．

また

$$\begin{aligned} n(A\cap(\overline{B\cup C}))&=n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C) \\ &=50-16-10+3=27. \end{aligned}$$

(3)　$a^4+c^2a^2-b^2c^2-b^4=0 \Longleftrightarrow (a^4-b^4)+c^2(a^2-b^2)=0 \Longleftrightarrow (a-b)(a+b)(a^2+b^2+c^2)=0$ であり，

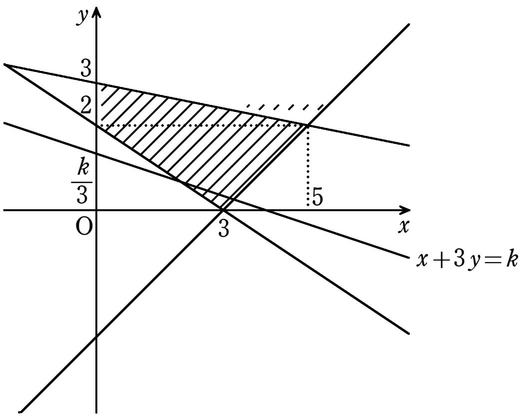
$a+b\fallingdotseq 0$，$a^2+b^2+c^2\fallingdotseq 0$ より，$a=b$

このとき，余弦定理を用いて

$$8^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cdot\cos120^\circ$$

$a>0$ より， $a=\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$.

(4) 不等式の表す領域は下図の斜線部分である．（ただし，境界を含む．）



$x+3y=k$ とおくと， $y=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{k}{3}$ なので k が最小・最大となるのは， y 切片が最小・最大となるときである．

よって，図より， $x+3y=k$ が $(3,0)$ を通るとき最小であり， $(5,2)$ を通るとき最大であるので

最小値 3，最大値 11 .

［２］ 以下の問いに答えなさい.

(1) t を実数とする. ベクトル $\vec{a}=(1-t,\ 2-t,\ 2t+3)$, $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ を考える. このとき, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{17}$ である. また, $|\vec{a}-\vec{b}|$ は $t=-\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\boxed{20}}\sqrt{\boxed{21}\boxed{22}}$ をとる.

(2) $0\leqq x\leqq 2\pi$ とするとき, 関数 $y=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+\cos x$ の最小値は $-\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}}$, 最大値は $\dfrac{\boxed{25}\boxed{26}}{\boxed{27}\boxed{28}}$ である.

(3) i を虚数単位とし, $z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とする. いま数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\mathrm{Re}(z^n)\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める. ただし, $\mathrm{Re}(w)$ は複素数 w の実部を表す. このとき, $a_1a_2a_3a_4a_5a_6=-\dfrac{\boxed{29}}{\boxed{30}\boxed{31}}$ であり,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2020}a_n=-\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$ である.

(4) 整式 $P=a^4-25a^2-50a-25$ を因数分解すると

$P=\left(a^2+\boxed{34}a+\boxed{35}\right)\left(a^2-\boxed{36}a-\boxed{37}\right)$ である. 整数 a に対して, $|P|$ が素数となるのは全部で $\boxed{38}$ 個あり, それらのうちの最大の素数は $\boxed{39}\boxed{40}$ である.

【解説】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(1-t)\cdot1+(2-t)\cdot1+(2t+3)\cdot1=6$.

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=(6t^2+6t+14)-2\cdot6+3=6t^2+6t+5=6\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{2}$

よって, $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{14}$.

(2) $\sin\dfrac{x}{2}=t$ とおくと, $0\leqq\dfrac{x}{2}\leqq\pi$ より, $0\leqq t\leqq1$ であり, $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ より

$$y=\frac{1}{2}t+(1-2t^2)=-2\left(t-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{33}{32}$$

よって, $t=1$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$, $t=\dfrac{1}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{33}{32}$.

(3) a_n は初項から順に $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, -1 , $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, 1 , $\cdots$ を繰り返す周期 6 の数列である.

したがって

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6=-\frac{1}{16}\ .$$

また, $2020=6\times336+4$ であるので

$$\sum_{n=1}^{2020}a_n=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\times336+a_1+a_2+a_3+a_4=-\frac{3}{2}\ .$$

(4) $P=a^4-25(a+1)^2=\{a^2+5(a+1)\}\{a^2-5(a+1)\}=(a^2+5a+5)(a^2-5a-5)$.

$|P|$ が素数となるとき, $a^2+5a+5=\pm1$ または $a^2-5a-5=\pm1$ が必要である.

それぞれ解いて, a が整数となるのは, $a=-1$, -2 , -3 , -4 , 6 である.

$a=-1$ のとき, $|P|=1$ より, 不適.

$a=-2$ のとき, $|P|=9$ より, 不適.

$a=-3$ のとき, $|P|=19$ より, 適する.

$a=-4$ のとき，$|P|=31$ より，適する．

$a=6$ のとき，$|P|=71$ より，適する．

よって，$|P|$ が素数となる a の個数は 3 個で，$|P|$ の最大値は 71．

［3］ A 君と B 君がさいころを振り得点を争うゲームを行うとする．最初に A 君は持ち点 10 点， B 君は持ち点 6 点であり，この状態からゲームを始めるとする，さいころを振り，出た目が 2 以下ならば A 君に +1 点， B 君に +3 点与えられる．また，さいころを振り，出た目が 3 以上ならば A 君に +2 点， B 君に +1 点与えられる．さいころを n 回振り， 2 以下の目が出た回数を x とする，以下の問いに答えなさい．

(1) $n=50$ とする．このとき， A 君と B 君の得点がちょうど等しくなるならば， $x=\boxed{41}\boxed{42}$ であり，そのときの各自の得点は $\boxed{43}\boxed{44}$ である．

(2) $n=5$ とする．このとき， A 君と B 君の得点がちょうど等しくなる確率は $\dfrac{\boxed{45}\boxed{46}}{\boxed{47}\boxed{48}\boxed{49}}$ である．

(3) $n=6$ とする．このとき， A 君の得点が B 君の得点よりも小さくなる確率は $\dfrac{\boxed{50}\boxed{51}}{\boxed{52}\boxed{53}\boxed{54}}$ である．

【解説】

さいころで

2 以下の目が出る： A 君に +1 点， B 君に +3 点 （確率 $\dfrac{1}{3}$）

3 以上の目が出る： A 君に +2 点， B 君に +1 点 （確率 $\dfrac{2}{3}$）

(1) 2 以下の目が x 回出るので， 3 以上の目が $50-x$ 回出る．

よって (Aの得点)$=10+1\cdot x+2(50-x)=110-x$

(Bの得点)$=6+3x+1\cdot(50-x)=56+2x$

(Aの得点)=(Bの得点) より $110-x=56+2x$ よって $x=18$

このとき，各自の得点は 92．

(2) 2 以下の目が x 回出るので， 3 以上の目が $5-x$ 回出る．

よって (Aの得点)$=10+1\cdot x+2(5-x)=20-x$

(Bの得点)$=6+3x+1\cdot(5-x)=2x+11$

(Aの得点)=(Bの得点) より $20-x=2x+11$ よって $x=3$

つまり，さいころを 5 回ふって， 2 以下の目が 3 回で て，かつ3 以上の目が 2 回出る確率を求めると

$${}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}.$$

(3) 2 以下の目が x 回出るので， 3 以上の目が $6-x$ 回出る．

よって (Aの得点)$=10+1\cdot x+2(6-x)=22-x$

(Bの得点)$=6+3x+1\cdot(6-x)=2x+12$

(Aの得点)<(Bの得点) より $22-x<2x+12$ よって $\dfrac{10}{3}<x$

つまり，これをみたす x の値は $x=4,\ 5,\ 6$ である．

$x=4,\ 5,\ 6$ は排反事象であることから，それぞれの確率を足し合わせて

$${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_6C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{73}{729}.$$

［4］ 関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2(1+e^x)}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の導関数を求めなさい．

(2) $f(x)$ は区間 $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において単調減少であることを示しなさい．

(3) p，q を定数とする．区間 $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において，不等式 $1-px^2\leqq\dfrac{1}{1+e^x}\leqq 1-qx^2$ がつねに成り立つような p と q のうち，$|p-q|$ が最小となるときの p と q の値をそれぞれ求めなさい．

【解説】

(1) $$f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2(1+e^x)-e^x\{2x(1+e^x)+x^2e^x\}}{x^4(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{xe^x\{x(1+e^x)-2(1+e^x)-xe^x\}}{x^4(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x(x-2-2e^x)}{x^3(1+e^x)^2}.$$

(2) $g(x)=x-2-2e^x$ とおくと， $g'(x)=1-2e^x$ であり， $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき，

$g'(x)\leqq g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-2\sqrt{e}<0$ となる． （$\because e>2.7$ ）

したがって， $g(x)$ は $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において単調減少であるから， $g(x)\leqq g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}-2\sqrt{e}<0$ である．

よって， $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき，$f'(x)=\dfrac{e^xg(x)}{x^3(1+e^x)}<0$ となり， $f(x)$ は単調減少であることがわかる． （証明終わり）

【別解】微分しなくても，$g(x)<0$ はすぐに求まります．

$g(x)=x-2-2e^x$ とおく．$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき，$x-2<0$，$-2e^x<0$ であるから，$g(x)<0$ である．

(以下略)

(3) (2)より

$$f(1)\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{e}{1+e}\leqq f(x)\leqq\frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}\quad\cdots①$$

一方，与式は

$$1-px^2\leqq\frac{1}{1+e^x}\leqq 1-qx^2 \iff -px^2\leqq\frac{1}{1+e^x}-1\leqq -qx^2$$

$$\iff -px^2\leqq-\frac{e^x}{1+e^x}\leqq -qx^2$$

$$\iff q\leqq\frac{e^x}{x^2(1+e^x)}(=f(x))\leqq p.\ (\because x^2>0)\quad\cdots②$$

となるので，与式が $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において常に成立するためには， ①⊂② より

$$q\leqq\frac{e}{1+e}\ \text{かつ}\ \frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}\leqq p$$

である．よって， $|p-q|$ が最小となるのは，それぞれ等号が成立するときであるので，求める p，q は

$$p=\frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}},\quad q=\frac{e}{1+e}.$$

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めなさい．

(2) $x>0$ とする．曲線 $y=f(x)$ の変曲点において，曲線に接する直線を ℓ とする．ℓ の方程式を求めなさい．

(3) $x>0$ とする．曲線 $y=f(x)$ に点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ で接する直線を m とする．(2) で求めた直線 ℓ と直線 m および曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めなさい．

【解説】

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$f(x)$ の増減表を作ると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$

ゆえに，$y=f(x)$ の極大値は $\dfrac{1}{2}$（$x=1$ のとき），極小値は $-\dfrac{1}{2}$（$x=-1$ のとき）．

(2) $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ より

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$x>0$ において，$f''(x)=0$ を解くことで $x=\sqrt{3}$．

つまり，$x>0$ において，$y=f(x)$ の変曲点の座標は $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$．

さらに，$f'(\sqrt{3})=\dfrac{1-3}{(1+3)^2}=-\dfrac{1}{8}$ であることから $\ell：y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$．

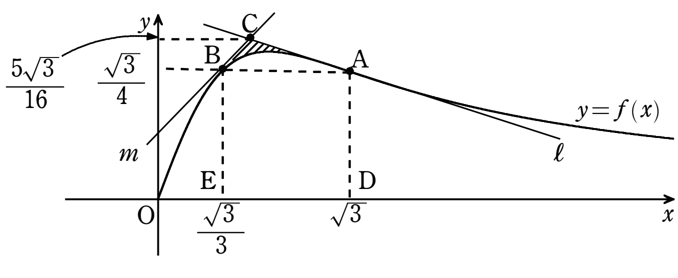
(3) (1)(2) と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意して，$y=f(x)$ $(x>0)$ のグラフの概形を考える．

$A\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ とする．また，直線 ℓ と直線 m の交点を C とする．

直線 m の方程式は，$f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{8}$ より $m：y=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$．

点 C の x 座標は，$-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}\sqrt{3}=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ を解くことで $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

よって $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{16}\right)$．



2 点 A，B から x 軸におろした垂線の足をそれぞれ D，E とおく．このとき求める面積は，五角形 ACBED の面積 S_1 から，曲線 $y=f(x)$ と，直線 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$x=\sqrt{3}$，および x 軸で囲まれた面積 S_2 を除いたものである．

$$S_1=\triangle\text{ABC}+\text{長方形 ABED}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{16}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{9}{16}.$$

$$S_2=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{x}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2}\log 3.$$

したがって，求める面積は，

$$S_1-S_2=\frac{9}{16}-\frac{1}{2}\log 3.$$

【講評】

$\boxed{1}\boxed{2}$ （易）

小問集合．いずれも教科書レベルの内容であった．

$\boxed{3}$ （やや易）

反復試行に関する確率の問題．(1) の誘導を利用し，(2)(3) が素早く解けたかが鍵を握る．

$\boxed{4}$ （やや易）

(2) はグラフを描いて済ませるのではなく，記述であることも踏まえて解説のように $g(x)$ を持ち出し $f'(x)$ の符号をしっかりと調べていくのがよいだろう．(3) は (2)の意味を考えて，与式の変形をしよう．

$\boxed{5}$ （やや易）

計算だけであるが，計算ミスのないようにしたい．

例年通りいかにミスをせず失点を防ぐかが大事であった．高得点勝負になることは必至である．一次突破ラインは 80 % 超か．他の科目の出来が合否を分けるだろうが，数学での失敗は致命的である．