解答速報

日本大学医学部（A方式）　数学

2020年 2月8日実施

［1］ 以下の問いに答えなさい.

(1)　2 つの放物線 $y = 4x^2 - 7x - 1$ と $y = x^2 - 2x + 1$ の共有点の x 座標の値は $x = -\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$, $\boxed{3}$ である．また，2 つの共有点をともに通る直線の方程式は $y = -\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{5}}x + \dfrac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$ である.

(2)　100 以下の自然数全体を全体集合 U とし，U の部分集合 A，B，C を $A = \{a \mid a \text{ は } 2 \text{ の倍数}\}$, $B = \{b \mid b \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$，$C = \{c \mid c \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}$ とする.
このとき，$n(A \cap B \cap C) = \boxed{8}$，$n(A \cap (\overline{B \cup C})) = \boxed{9}\,\boxed{10}$ である．ここで，$n(T)$ は集合 T の要素の個数を表す.

(3)　三角形 ABC において，各頂点 A，B，C の対辺の長さを a，b，c で表すとする．いま，$\angle C = 120^\circ$，$c = 8$，かつ，$a^4 + c^2a^2 - b^2c^2 - b^4 = 0$ ならば，$a = \dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}}\sqrt{\boxed{13}}$ である.

(4)　連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{5}x + 3 \\ y \geqq x - 3 \\ x \geqq 0 \\ y \geqq -\dfrac{2}{3}x + 2 \end{cases}$$

により囲まれる図形を D で表す．$(x,\ y)$ を D の点とするとき，$x + 3y$ の最小値は $\boxed{14}$ であり，最大値は $\boxed{15}\,\boxed{16}$ である.

解答

(1)　2 曲線の共有点の x 座標は $4x^2 - 7x - 1 = x^2 - 2x + 1$ を整理し，$(3x+1)(x-2) = 0$，よって $x = \boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$, $\mathbf{2}$.

それぞれ y 座標を計算すると，$\dfrac{16}{9}$, 1．よって，直線の傾きは $\dfrac{2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)}{1 - \dfrac{16}{9}} = -\dfrac{1}{3}$ であり，直線の方程式は $\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}}$.

別解

2 曲線が 2 つの共有点をもつとき，実数 k を実数として

$$4x^2 - 7x - 1 - y - k(x^2 - 2x + 1 - y) = 0$$

は，2 つの共有点を通る放物線または直線の方程式を表す．x^2 の係数を見ることで

$$4x^2 - 7x - 1 - y - 4(x^2 - 2x + 1 - y) = 0$$

は直線となる．異なる 2 点を通る直線の方程式は 1 通りに定まるから，求める直線は，$\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}$.

(2)　$A\cap B\cap C=\{x\mid x$ は 30 の倍数 $\}$ なので，$n(A\cap B\cap C)=\mathbf{3}$.
また

$$\begin{aligned} n(A\cap(\overline{B\cup C})) &= n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C) \\ &= 50-16-10+3 \\ &= \mathbf{27}. \end{aligned}$$

(3)

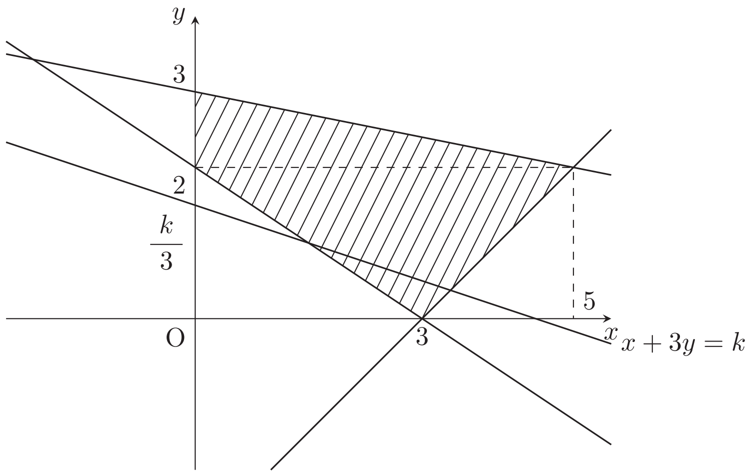
$$\begin{aligned} & a^4+c^2a^2-b^2c^2-b^4=0 \\ \Longleftrightarrow & (a^4-b^4)+c^2(a^2-b^2)=0 \\ \Longleftrightarrow & (a-b)(a+b)(a^2+b^2+c^2)=0 \end{aligned}$$

であり，$a+b\fallingdotseq 0$，$a^2+b^2+c^2\fallingdotseq 0$ より，$a=b$.
このとき，余弦定理を用いて

$$8^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cdot\cos 120^\circ$$

$a>0$ より，$a=\boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{3}}$.

(4)　不等式の表す領域は下図の斜線部分である．（ただし，境界を含む．）



$x+3y=k$ とおくと，$y=-\frac{x}{3}+\frac{k}{3}$ なので k が最小最大となるのは，y 切片が最小最大となるときである．
よって，図より，$x+3y=k$ が $(3,\ 0)$ を通るとき最小であり，$(5,\ 2)$ を通るとき最大であるので最小値 $\mathbf{3}$，最大値 $\mathbf{11}$.

[2] 以下の問いに答えなさい.

(1) t を実数とする.ベクトル $\vec{a}=(1-t,\ 2-t,\ 2t+3)$, $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ を考える.このとき,$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{17}$ である.また,$|\vec{a}-\vec{b}|$ は $t=-\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\boxed{20}}\sqrt{\boxed{21}\,\boxed{22}}$ をとる.

(2) $0\leqq x\leqq 2\pi$ とするとき,関数 $y=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}+\cos x$ の最小値は $-\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}}$,最大値は $\dfrac{\boxed{25}\,\boxed{26}}{\boxed{27}\,\boxed{28}}$ である.

(3) i を虚数単位とし,$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.いま数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\mathrm{Re}\,(z^n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める.ただし,$\mathrm{Re}\,(w)$ は複素数 w の実部を表す.このとき,$a_1a_2a_3a_4a_5a_6=-\dfrac{\boxed{29}}{\boxed{30}\,\boxed{31}}$ であり,$\displaystyle\sum_{n=1}^{2020}a_n=-\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$ である.

(4) 整式 $P=a^4-25a^2-50a-25$ を因数分解すると $P=\left(a^2+\boxed{34}\,a+\boxed{35}\right)\left(a^2-\boxed{36}\,a-\boxed{37}\right)$ である.整数 a に対して,$|P|$ が素数となるのは全部で $\boxed{38}$ 個あり,それらのうち最大の素数は $\boxed{39}\,\boxed{40}$ である.

$\boxed{\text{解答}}$

(1)

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(1-t)\cdot1+(2-t)\cdot1+(2t+3)\cdot1\\&=\mathbf{6}\\|\vec{a}-\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=(6t^2+6t+14)-2\cdot6+3\\&=6t^2+6t+5\\&=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}\end{aligned}$$

よって,$t=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$ のとき,最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{14}}$.

(2) $\sin\dfrac{x}{2}=t$ とおくと,$0\leqq\dfrac{x}{2}\leqq\pi$ より,$0\leqq t\leqq1$ であり,$\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ より

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{2}t+(1-2t^2)\\&=-2\left(t-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{33}{32}.\end{aligned}$$

よって,$t=1$ のとき最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$,$t=\dfrac{1}{8}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{33}{32}}$.

(3) $\{a_n\}$ は初項から順に $\dfrac{1}{2}$,$-\dfrac{1}{2}$,-1,$-\dfrac{1}{2}$,$\dfrac{1}{2}$,1,$\cdots$ を繰り返す周期 6 の数列である.

したがって

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6=\boldsymbol{-\frac{1}{16}}.$$

また，$2020 = 6 \times 336 + 4$ であるので

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2020} a_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \times 336 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= \boldsymbol{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}P &= a^4 - 25(a+1)^2 \\ &= \{a^2 + 5(a+1)\}\{a^2 - 5(a+1)\} \\ &= \boldsymbol{(a^2 + 5a + 5)(a^2 - 5a - 5)}.\end{aligned}$$

$|P|$ が素数となるとき，$a^2 + 5a + 5 = \pm 1$ または $a^2 - 5a - 5 = \pm 1$ が必要である．
それぞれ解いて，a が整数となるのは，$a = -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ 6$ である．

$a = -1$ のとき，$|P| = 1$ より，不適.

$a = -2$ のとき，$|P| = 9$ より，不適.

$a = -3$ のとき，$|P| = 19$ より，適する.

$a = -4$ のとき，$|P| = 31$ より，適する.

$a = 6$ のとき，$|P| = 71$ より，適する.

よって，$|P|$ が素数となる a の個数は 3 個で，$|P|$ の最大値は **71**.

[3]

A 君と B 君がさいころを振り得点を争うゲームを行うとする．最初に A 君は持ち点 10 点，B 君は持ち点 6 点であり，この状態からゲームを始めるとする．さいころを振り，出た目が 2 以下ならば A 君に +1 点，B 君に +3 点与えられる．さいころを振り，出た目が 3 以上ならば A 君に +2 点，B 君に +1 点与えられる．さいころを n 回振り，2 以下の目が出た回数を x とする．以下の問いに答えなさい．

(1)　$n = 50$ とする．このとき，A 君と B 君の得点がちょうど等しくなるならば，$x = \boxed{41}\,\boxed{42}$ であり，そのときの各自の得点は $\boxed{43}\,\boxed{44}$ である．

(2)　$n = 5$ とする．このとき，A 君と B 君の得点がちょうど等しくなる確率は $\dfrac{\boxed{45}\,\boxed{46}}{\boxed{47}\,\boxed{48}\,\boxed{49}}$ である．

(3)　$n = 6$ とする．このとき，A 君の得点が B 君の得点よりも小さくなる確率は $\dfrac{\boxed{50}\,\boxed{51}}{\boxed{52}\,\boxed{53}\,\boxed{54}}$ である．

解答

さいころで

- 2 以下の目が出る：A 君に +1 点，B 君に +3 点 $\left(\text{確率}\dfrac{1}{3}\right)$
- 3 以上の目が出る；A 君に +2 点，B 君に +1 点 $\left(\text{確率}\dfrac{2}{3}\right)$

(1)　2 以下の目が x 回出るので，3 以上の目が $50 - x$ 回出る．
よって

$$\begin{aligned}(\text{A の得点}) &= 10 + 1 \cdot x + 2(50 - x)\\ &= 110 - x\\ (\text{B の得点}) &= 6 + 3x + 1 \cdot (50 - x)\\ &= 56 + 2x\end{aligned}$$

(A の得点) = (B の得点) より $110 - x = 56 + 2x$ よって $x = \mathbf{18}$.
このとき，各自の得点は **92**.

(2)　2 以下の目が x 回出るので，3 以上の目が $5 - x$ 回出る．

$$\begin{aligned}(\text{A の得点}) &= 10 + 1 \cdot x + 2(5 - x)\\ &= 20 - x\\ (\text{B の得点}) &= 6 + 3x + 1 \cdot (5 - x)\\ &= 2x + 11\end{aligned}$$

(A の得点) = (B の得点) より $20 - x = 2 + 11x$ よって $x = 3$.
つまり，さいころを 5 回振って，2 以下の目が 3 回出て，かつ 3 以上の目が 2 回出る確率を求めると

$${}_5\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{243}}.$$

(3)　2 以下の目が x 回出るので，3 以上の目が $6-x$ 回出る．

$$\begin{aligned}(\text{A の得点}) &= 10+1\cdot x+2(6-x)\\ &= 22-x\\ (\text{B の得点}) &= 6+3x+1\cdot(6-x)\\ &= 2x+12\end{aligned}$$

(A の得点) $<$ (B の得点) より $22-x<2+12x$．よって $x>\dfrac{10}{3}$．
つまり，これをみたす x の値は $x=4,\ 5,\ 6$ である．
$x=4,\ 5,\ 6$ は排反事象であることから，それぞれの確率を足し合わせて

$${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0=\boldsymbol{\frac{73}{729}}.$$

$\boxed{4}$

関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2(1+e^x)}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ の導関数を求めなさい.

(2) $f(x)$ は区間 $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において単調減少であることを示しなさい.

(3) p, q を定数とする．区間 $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において，不等式 $1-px^2\leqq\dfrac{1}{1+e^x}\leqq 1-qx^2$ がつねに成り立つような p と q のうち，$|p-q|$ が最小となるときの p と q の値をそれぞれ求めなさい.

解答

(1)

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2(1+e^x)-e^x\{2x(1+e^x)+x^2e^x\}}{x^4(1+e^x)^2}$$
$$=\frac{xe^x\{x(1+e^x)-2(1+e^x)-xe^x\}}{x^4(1+e^x)^2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{e^x(x-2-2e^x)}{x^3(1+e^x)^2}}$$

(2) $g(x)=x-2-2e^x$ とおくと，$g'(x)=1-2e^x$ であり，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき，

$g'(x)\leqq g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-2\sqrt{e}<0$ となる．$(\because\ e>2.7)$

したがって，$g(x)$ は $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ において単調減少であるから，$g(x)\leqq g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}-2\sqrt{e}<0$ である.

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき，$f'(x)=\dfrac{e^xg(x)}{x^3(1+e^x)^2}<0$ となり，$f(x)$ は単調減少であることがわかる．（証明終わり）

別解

微分しなくても，$g(x)<0$ はすぐに求まる.

$g(x)=x-2-2e^x$ とおく．$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき，$x-2<0$，$-2e^x<0$ であるから，$g(x)<0$.

(3) (2) より

$$f(1)\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\ \frac{e}{1+e}\leqq f(x)\leqq\frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}\quad\cdots\cdots①$$

一方，与式は

$$1-px^2\leqq\frac{1}{1+e^x}\leqq 1-qx^2$$
$$\iff -px^2\leqq\frac{1}{1+e^x}-1\leqq -qx^2$$
$$\iff -px^2\leqq-\frac{e^x}{1+e^x}\leqq -qx^2$$
$$\iff q\leqq\frac{e^x}{x^2(1+e^x)}\ (=f(x))\leqq p\quad(\because\ x^2>0)\quad\cdots\cdots②$$

となるので，与式が $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ において常に成立するためには，① ⊂ ② より

$$q \leqq \frac{e}{1+e} \text{かつ} \frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}} \leqq p$$

である．よって，$|p-q|$ が最小となるのは，それぞれ等号が成立するときであるので，求める p，q は

$$p = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}},\ q = \boldsymbol{\frac{e}{1+e}}.$$

$\boxed{5}$

関数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ について以下の問いに答えなさい.

(1)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めなさい.

(2)　$x>0$ とする．曲線 $y=f(x)$ の変曲点において，曲線に接する直線を ℓ とする．ℓ の方程式を求めなさい.

(3)　$x>0$ とする．曲線 $y=f(x)$ に点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ で接する直線を m とする．(2) で求めた直線 ℓ と直線 m および曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めなさい.

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$f(x)$ の増減表を作ると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$

ゆえに，$y=f(x)$ の極大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$（$x=1$ のとき），極小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$（$x=-1$ のとき).

(2)　$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ より

$$\begin{aligned} f''(x)&=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}\\ &=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

$x>0$ において，$f''(x)=0$ を解くことで $x=\sqrt{3}$.

$f''(x)$ は $x=\sqrt{3}$ において，符号を正から負に変える．つまり，$x>0$ において，$y=f(x)$ の変曲点の座標は $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

さらに，$f'(\sqrt{3})=\dfrac{1-3}{(1+3)^2}=-\dfrac{1}{8}$ であることから $\ell:\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}\sqrt{3}}$.

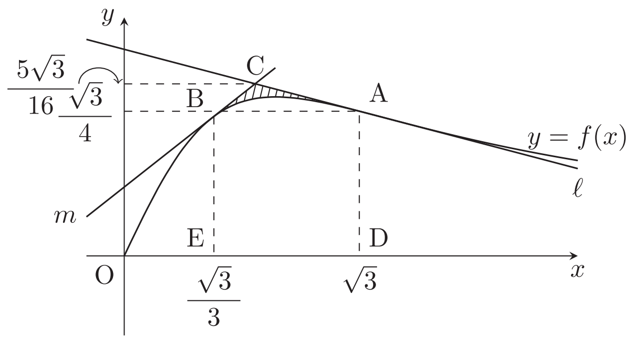
(3)　(1) (2) と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意して，$y=f(x)$ $(x>0)$ のグラフの概形を考える.

A$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，B$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ とする．また，直線 ℓ と直線 m の交点を C とする.

直線 m の方程式は，$f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{8}$ より $m:y=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

点 C の x 座標は，$-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}\sqrt{3}=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ を解くことで $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

よって C$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{16}\right)$.



2 点 A，B から x 軸におろした垂線の足をそれぞれ D，E とおく．このとき求める面積は，五角形 ACBED の面積 S_1 から，曲線 $y=f(x)$ と，直線 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$x=\sqrt{3}$，および x 軸で囲まれた面積 S_2 を除いたものである．

$$\begin{aligned}
S_1 &= \triangle\mathrm{ABC} + \text{長方形 ABED} \\
&= \frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(\frac{5\sqrt{3}}{16}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{16}. \\
S_2 &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2}\log 3.
\end{aligned}$$

したがって，求める面積は，

$$S_1-S_2=\boldsymbol{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}\log 3}.$$

講評

$\boxed{1}\boxed{2}$（易）小問集合．いずれも教科書レベルの内容であった。

$\boxed{3}$（やや易）反復試行に関する確率の問題．(1) の誘導を利用し，(2) (3) が素早く解けたかが鍵を握る．

$\boxed{4}$（やや易）(2) はグラフを描いて済ませるのではなく，記述であることも踏まえて解説のように $g(x)$ を持ち出し $f'(x)$ の符号をしっかりと調べていくのがよいだろう．(3) は (2) の意味も考えて，与式の変形をしよう．

$\boxed{5}$（やや易）計算だけであるが，計算ミスのないようにしたい．

例年通りいかにミスをせず失点を防ぐかが大事であった．高得点勝負になることを必至である．一次突破ラインは 80 %超か．他の科目の出来が合否を分けるだろうか，数学での失点は致命的である．