解答速報

埼玉医科大学(後期)　数学

2020年 2月15日実施

1　次の問い(**問**1～3)の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ.

問1　200以下のすべての正の偶数の積を計算すると，数値の末尾には0が連続して $\boxed{1}\boxed{2}$ 個並ぶ. 200以下のすべての正の奇数の積を計算すると，数値の末尾の数字は $\boxed{3}$ である.

問2　ある集団で5人に1人がかかる病気がある. この集団に属するAさんがその病気に関する検査を受けたところ，陽性の結果が出た. その病気にかかっている人がこの検査で正しく陽性と判定される確率は90%で，かかっていない人が誤って陽性と判定される確率は5%である. Aさんがこの病気に**かかっていない**確率は $\boxed{4}\boxed{5}$ %である.

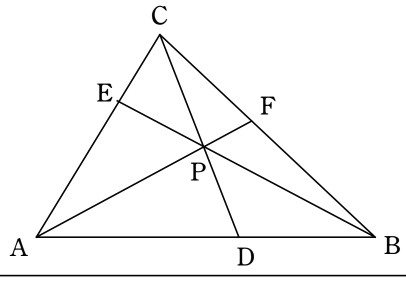
問3　図のように，△ABCにおいて，辺ABを3:2に内分する点をD，辺ACを2:1に内分する点をE，BEとCDの交点をP，BCとAPの延長との交点をFとする. このとき，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AF}}=\frac{\boxed{6}}{\boxed{7}}$$

である. また，△ABP，△BCP，△CAPの面積をそれぞれ I，J，K とおくと，

$$I:J:K=\frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}:\frac{\boxed{10}}{\boxed{11}}:1$$

である.



【解答】問1　24(個)，5　　　問2　18%　　　問3　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{7}{9}$，$I:J:K=\dfrac{4}{3}:\dfrac{2}{3}:1$

【解説】

問1

200以下のすべての正の偶数の積を考える. このとき，

$$\text{集合 } A=\{x \mid x\text{ は正の偶数，}x\leqq 200\}=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 200\}$$

には，5の倍数が $\left[\dfrac{200}{5\times 2}\right]=20$ 個，$5^2=25$ の倍数が，$\left[\dfrac{200}{5^2\times 2}\right]=4$ 個含まれるので，この積を素因数分解したときに現れる素因数5の個数は，$20+4=24$ 個. すなわち，数値の末尾には0が連続して24個並ぶ.

また，200以下の正の奇数の積を計算するとき，この積を10を法として合同式で計算すると，

$$1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times 199\equiv(1\times 3\times 5\times 7\times 9)^{20}\equiv\{1\times 3\times 5\times(-3)\times(-1)\}^{20}$$

$$\equiv 45^{20}\equiv 5.$$

したがって，数値の末尾の数字は5である.

問 2

A さんが病気にかかっているという事象を X，A さんが検査で陽性の結果が出るという事象を Y とする．

このとき，与えられた条件から，

$$P(X)=\frac{1}{5}=0.2$$

$$P_X(Y)=0.9$$

$$P_{\overline{X}}(Y)=0.05$$

また，求める確率は $P_Y(\overline{X})$ である．

$$P(X\cap Y)=P(X)\cdot P_X(Y)=0.18$$

$$P(\overline{X}\cap Y)=P(\overline{X})\cdot P_{\overline{X}}(Y)=\{1-P(X)\}P_{\overline{X}}(Y)=0.04$$

$$P(Y)=P(X\cap Y)+P(\overline{X}\cap Y)=0.22$$

$$P_Y(\overline{X})=\frac{P(\overline{X}\cap Y)}{P(Y)}=\frac{0.04}{0.22}\fallingdotseq 0.18$$

これを百分率に直して，A さんが病気にかかっていない確率は 18 % である．

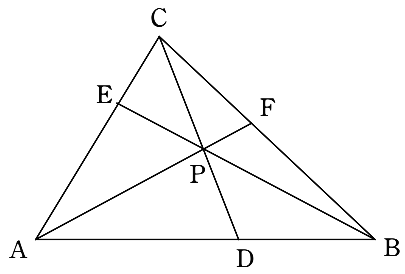
問 3

条件より，チェバの定理，メネラウスの定理を用いると，

BF : FC=4 : 3，AP : PF=7 : 2，BP : PE=2 : 1，CP : PD=5 : 4

である．したがって，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AF}}=\frac{7}{9}.$$



また，△ABC の面積を S とおくと，

$$I=\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{CD}}S=\frac{4}{9}S.$$

$$J=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{AF}}S=\frac{2}{9}S.$$

$$K=\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{BE}}S=\frac{3}{9}S.$$

したがって，

$$I:J:K=\frac{4}{9}S:\frac{2}{9}S:\frac{3}{9}S=\frac{4}{3}:\frac{2}{3}:1.$$

2 次の文章を読み，下の問い（**問** 1，2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

c を定数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-x^4+2x^2-cx$$

とする．

問 1 $f(x)$ が極小値を持つための必要十分条件は，

$$\frac{\boxed{12}\,\boxed{13}\sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{15}}<c<\frac{\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{18}}$$

である．これが満たされているとき，極小値をとる x の範囲は

$$\frac{\boxed{19}\sqrt{\boxed{20}}}{\boxed{21}}<x<\frac{\sqrt{\boxed{22}}}{\boxed{23}}$$

である．

問 2 $f(x)$ が $x=\dfrac{1}{2}$ で極小値をとるとき，最大値は

$$\frac{1}{\boxed{24}\,\boxed{25}}\left(\boxed{26}\,\boxed{27}+\boxed{28}\,\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}\,\boxed{31}}\right)$$

であり，それを与える x の値は

$$x=-\frac{1}{\boxed{32}}\left(\boxed{33}+\sqrt{\boxed{34}\,\boxed{35}}\right)$$

である．

【解答】問 1 $\dfrac{-8\sqrt{3}}{9}<c<\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$，$\dfrac{-\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 　問 2 $\dfrac{1}{32}(37+13\sqrt{13})$，$x=-\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{13})$

【解説】

$$f(x)=-x^4+2x^2-cx,\ f'(x)=-4x^3+4x-c.$$

問 1

$g(x)=-4x^3+4x$ とおく．

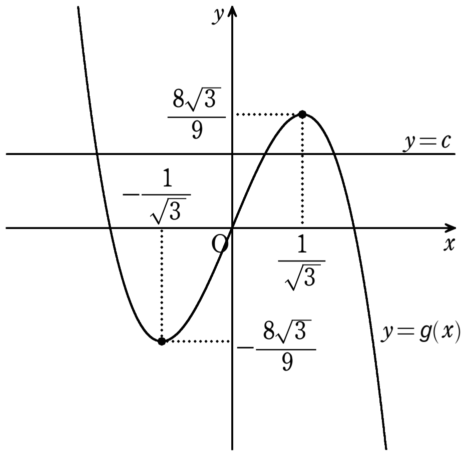
$$\begin{cases} f'(x)>0 \iff g(x)>c \\ f'(x)<0 \iff g(x)<c \end{cases} \quad \cdots①$$

であるから，$y=g(x)$ のグラフと，直線 $y=c$ の位置関係は $f'(x)$ の符号変化に対応する．

$$g'(x)=-12x^2+4=-12\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

したがって，$g(x)$ の増減は以下のようになる．

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$	↗	$-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$	↘



$-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}<c<\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ とおけば，右のように

$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=c$ との共有点が 3 点存在し，

その x 座標を小さい順に α，β，γ とおく．このとき，

① より，$f(x)$ の増減は以下のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

このとき，$x=\beta$ で極小値をもつ．c がこの範囲外のときは極小値は存在しない．

したがって，$f(x)$ が極小値を持つための必要十分条件は，

$$-\frac{8\sqrt{3}}{9}<c<\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

これが満たされているとき，$x=\beta$ で極小値をもち，グラフより，$-\frac{\sqrt{3}}{3}<\beta<\frac{\sqrt{3}}{3}$ である．

問 2

$f(x)$ が $x=\frac{1}{2}$ で極小値を取るとき，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ が必要．

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)-c=0 \iff c=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} f'(x)&=-4x^3+4x-\frac{3}{2} \\ &=-\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+2x-3) \end{aligned}$$

であり，$f'(x)=0$ を満たす x の値は，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}$．このとき $f(x)$ の増減は以下のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)=(4x^2+2x-3)\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{13}{8}x+\frac{3}{4}$ と変形できるので，$f(x)$ の極大値は，

$$f\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}\right)=-\frac{13}{8}\cdot\frac{-1\pm\sqrt{13}}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{32}(37\mp13\sqrt{13}).$$

したがって，$f(x)$ の最大値は $\frac{1}{32}(37+13\sqrt{13})$ であり，それを与える x の値は $x=-\frac{1}{4}(1+\sqrt{13})$ である．

3 次の文章を読み，下の問い（問1～2）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．

k を自然数とし，

$$T_k=\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^3dt$$

とする．

問1 $T_3=\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}\,\boxed{38}}$ である．

問2 任意の自然数 n について

$$\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{\boxed{39}}{\boxed{40}}-\frac{\boxed{41}}{(n+\boxed{42})(n+\boxed{43})(n+\boxed{44})}$$

である．ただし，$\boxed{42}<\boxed{43}<\boxed{44}$ とする．

問3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}T_k=\frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$ である．

【解答】問1 $\dfrac{1}{60}$　　問2 $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$　　問3 $\dfrac{1}{3}$

問1

$$T_3=\int_0^1 t^2(1-t)^3dt=\int_0^1(t^2-3t^3+3t^4-t^5)dt=\frac{1}{60}$$

問2

$$T_k=\int_0^1 t^{k-1}(1-3t+3t^2-t^3)dt=\int_0^1(t^{k-1}-3t^k+3t^{k+1}-t^{k+2})dt$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}T_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

問3

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}-\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}=\frac{1}{3}$$

【補足】

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=\frac{m!\cdot n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\cdot(-1)^n$$

を用いると早い．

$$T_k=\int_0^1 t^{k-1}(1-t)^k dt=\frac{(k-1)!\,3!}{(k+3)!}(1-0)^{k+3}=\frac{6}{(k+3)(k+2)(k+1)k}$$

であるから，

$$T_3=\frac{6}{6\cdot5\cdot4\cdot3}=\frac{1}{60}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} T_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\} \\
&= 2\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} T_k = \frac{1}{3}.
$$

と求まる.

4 次の文章を読み，下の問い（問 1 ～ 2 ）の各枠に当てはまる符号または数字をマークせよ．必要があれば，$\log_e 10 = 2.3$，$\log_{10} 2 = 0.30$ を用いること．

太陽から地球に降り注ぐ光は，深海の底にはほとんど届かない．海面に光が当たっているとしても，水深とともに辺りは暗くなる．一般に，光は空気や水などの物質で満たされた空間を通ると，距離とともに明るさが減少する．
いま，ある物質で満たされた空間を光が進む距離を x とし，そこでの光の明るさを $I(x)$ と表す．$I(x)$ は $I(x) = I(0)f(x)$ と書けて，$f(x)$ は x の指数関数であるものとする．さらに，$f(10) = \dfrac{1}{10}$ であるものとする．

問 1　$f(x) = \dfrac{1}{2}$ となるのは

$$x = \boxed{47}\,.\,\boxed{48}$$

のときである．

問 2　$f(x) = \dfrac{1}{e}$ となるのは

$$x = \boxed{49}\,.\,\boxed{50}$$

のときである．

問 3　$|h| \fallingdotseq 0$ のときに成り立つ 1 次の近似式 $e^{-h} \fallingdotseq 1 - h$ を用いると，

$$f(1) \fallingdotseq 0.\,\boxed{51}\,\boxed{52}$$

である．

【解答】問 1　$x = 3.0$　　問 2　$x = 4.3$　　問 3　$f(1) \fallingdotseq 0.77$ または 0.78 または 0.79

$f(x) = a^x$ とおく．$f(10) = \dfrac{1}{10}$ より，$a^{10} = \dfrac{1}{10} \iff a = 10^{-\frac{1}{10}}$ となるから，

$$f(x) = 10^{-\frac{x}{10}}$$

問 1

$f(x) = \dfrac{1}{2}$ のとき，$10^{-\frac{x}{10}} = 2^{-1}$

両辺の常用対数をとると，$-\dfrac{x}{10} = -\log_{10} 2$ となるから，

$$x = 10\log_{10} 2 = 3.0$$

問 2

$f(x) = \dfrac{1}{e}$ のとき，$10^{-\frac{x}{10}} = e^{-1}$

両辺の自然対数をとると，$-\dfrac{x}{10}\log_e 10 = -1$ となるから，

$$x = \frac{10}{\log_e 10} = \frac{10}{2.3} \fallingdotseq 4.3$$

問 3

$10 = e^{\log_e 10} = e^{2.3}$ より，$f(1) = 10^{-\frac{1}{10}} = e^{-0.23}$

$-0.23 \fallingdotseq 0$ と考えて，

$$f(1) \fallingdotseq 1 - 0.23 = 0.77$$

【別解①】

$f(1)=e^{-0.23}=(e^{-0.115})^2$ と変形できる．$-0.115\fallingdotseq 0$ と考えて，

$$f(1)\fallingdotseq(1-0.115)^2=0.885^2=0.783225.$$

したがって，$f(1)\fallingdotseq 0.78$.

【別解②】

$f(1)=e^{-0.23}=(e^{-0.046})^5$ と変形できる．$-0.046\fallingdotseq 0$ と考えて，

$$f(1)\fallingdotseq(1-0.046)^5=0.954^5=0.7902\cdots.$$

したがって，$f(1)\fallingdotseq 0.79$.

別解①，別解② のように精度を高めることができる．$h\fallingdotseq 0$ であるから，どのような値を使うべきか考えよう．
今回の問題では，計算過程が問われていないので，どの値も正解であると思われる．

【参考】実際の値は，$10^{-\frac{1}{10}}=0.79432823\cdots$ である．

【講評】
出題傾向が変わり，例年出題されていた確率の大問が無く，条件付き確率が小問として出された．また，大問$\boxed{4}$は見慣れないテーマだったので，戸惑った受験生も多いだろう．計算力が試される大問$\boxed{2}$，$\boxed{3}$をしっかり取りたい．１次突破には７５％程度必要だろうか．