医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

東京医科大学　数学

2020年 2月 1日実施

第1問

(1)　正の整数 a と b について，等式

$$\sqrt[3]{301\sqrt{a}-319\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

が成立している。実数 $\sqrt{ab}$ が整数でないとき $a=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2)　実数 α が $0 \leqq \alpha < 2\pi$ の範囲にあり，β が $0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあるとき

$$\left(6\cos\alpha \cdot \sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha \cdot \sqrt{15\sin\beta}\right)^2$$

の最大値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(3)　不等式

$$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}<\frac{1}{48}$$

をみたす正の整数 m の最小値は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(4)　不等式

$$\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^4-\left(\sqrt[3]{n}\right)^4>40$$

をみたす正の整数 n の最小値は $\boxed{\text{キクケコサ}}$ である。

解答

(1)　$a=82$

(2)　最大値は 39

(3)　最小値は 64

(4)　最小値は 27000

解説

(1)　両辺 3 乗して，整理すると $(a+3b-301)\sqrt{a}=(3a+b-319)\sqrt{b}$ となる。

さらに $\sqrt{b}$ をかけると $(a+3b-301)\sqrt{ab}=(3a+b-319)b$ となる。

ここで，$a+3b-301 \fallingdotseq 0$ とすると $\sqrt{ab}$ が有理数となってしまうが，$\sqrt{ab}$ は分母に整数を取り得ない。すなわち $a+3b-301=1$ しかあり得なくなるのだが，これは $\sqrt{ab}$ が整数でないことに反する。

したがって $a+3b=301$ が決まり，$3a+b=319$ が従う。

あとは連立方程式を解いて $(a,\ b)=(\mathbf{82},\ 73)$

(2)　$\overrightarrow{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\overrightarrow{b}=(6\sqrt{\cos\beta},\ \sqrt{15\sin\beta})$ とおくと，

$$|\overrightarrow{a}|^2=1$$

$$|\overrightarrow{b}|^2=36\cos\beta+15\sin\beta=39\sin(\beta+\phi)\leqq 39$$

$$\left(\text{ただし } \phi \text{ は} \sin\phi=\frac{5}{13},\ \cos\phi=\frac{12}{13} \text{ を満たす角}\right)$$

となっている。$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とおくと，

$$(\text{与式})=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\cos^2\theta\leqq 39$$

であるが，$|\overrightarrow{b}|^2=39$ かつ $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行であるとき，すなわち $\overrightarrow{b}=\left(12\sqrt{\dfrac{3}{13}},\ 5\sqrt{\dfrac{3}{13}}\right)$，$\overrightarrow{a}=\left(\pm\dfrac{12}{13},\ \pm\dfrac{5}{13}\right)$（複号同順）のとき等号が成立するので，最大値は **39** である。

(3)　この問題は「東京医大の定番の問題」である。$\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m}=\displaystyle\int_m^{m+1}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$ と読みたいところ。あとは $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ のグラフが単調減少であることと，$f(64)=\dfrac{1}{48}$ であることを考慮に入れると，

$$\int_{63}^{64}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx>\int_{63}^{64}\frac{1}{48}\,dx=\frac{1}{48}$$
$$\int_{64}^{65}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx<\int_{64}^{65}\frac{1}{48}\,dx=\frac{1}{48}$$

であることがわかり，$m=\mathbf{64}$ と決まる。

(4)　(3) と全く同種の問題。$\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^4-\left(\sqrt[3]{n}\right)^4=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\,dx$ と読むことができれば (3) と同じように解決する。

$f(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ のグラフが単調増加であり，$f(27000)=40$ であることを考慮に入れると，

$$\int_{26999}^{27000}\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\,dx<\int_{26999}^{27000}40\,dx=40$$
$$\int_{27000}^{27001}\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\,dx>\int_{27000}^{27001}40\,dx=40$$

したがって，$n=\mathbf{27000}$ である。

第 2 問

第 1 象限での曲線

$$C : x^4 + y^2 = 25 \ (x > 0 \text{ かつ } y > 0)$$

と x 軸と y 軸により囲まれた図形を F とする。

(1)　曲線 C 上の点 $(2,\ 3)$ における接線の y 切片を b とすると

$$b = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2)　図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とすると

$$V = \boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\pi$$

である。

(3)　図形 F を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を W とすると

$$W = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi^2$$

である。

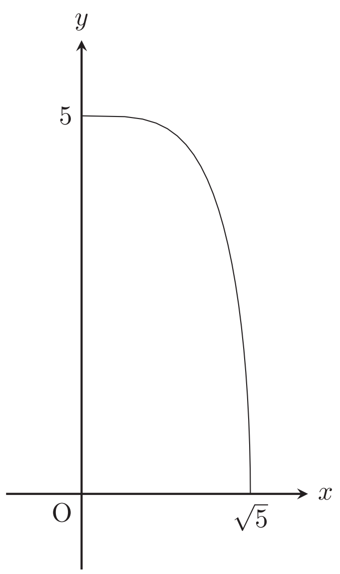
解答

(1)　$b = \dfrac{41}{3}$

(2)　$V = 20\sqrt{5}\pi$

(3)　$W = \dfrac{25}{4}\pi^2$

解説



(1)　両辺を x で微分すると,

$$4x^3 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{y}$$

となるので，点 (2, 3) における接線は，

$$y = -\frac{16}{3}(x-2)+3 = -\frac{16}{3}x + \frac{41}{3}$$

より，$\boldsymbol{b = \dfrac{41}{3}}$ である．

(2)　求める体積 V は，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{5}} \pi y^2 \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{5}} \pi(25-x^4) \, dx \\ &= \pi\Big[25x - \frac{x^5}{5}\Big]_0^{\sqrt{5}} \\ &= \boldsymbol{20\sqrt{5}\pi} \end{aligned}$$

(3)　求める体積 W は，

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{5} \pi x^2 \, dy \\ &= \int_{-}^{5} \pi\sqrt{25-y^2} \, dy \\ &= \pi \cdot \frac{25}{4}\pi \\ &= \boldsymbol{\frac{25}{4}\pi^2} \end{aligned}$$

第 3 問

関数

$$f(x)=\sqrt{9+\frac{19}{9}\sin x}$$

の積分により二つの関数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\ dt \text{ と } S(x)=\int_0^x f(x+t)\,dt$$

を定める。

このとき，すべての実数 a について，$x=a$ における微分係数 $F'(a)$ と $S'(a)$ は正の実数である。たとえば

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \text{ であり，} S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。したがって，$S(x)$ の逆関数 $g(x)=S^{-1}(x)$ が存在する。

この関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ について

$$g'(0)=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{\boxed{\text{クケコ}}}{\boxed{\text{サシス}}}$$

である。

解答

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{10}{3},\ S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{3},\ g'(0)=\frac{1}{3},\ \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{-19}{486}$$

解説

まず，$F'(x)=f(x)$，$S'(x)=2f(2x)-f(x)$ であることに注意しておく。

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$$

$$S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

以下の変形に注意しておこう。

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\times\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$y=S(x)$ とすると $x=g(y)$ であるから，

$$g'(0)=\frac{1}{S'(0)}=\frac{1}{f(0)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

次に，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=g''(0)$ であり，

$$g''(y)=\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2f(2x)-f(x)}\right)\times\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{-4f'(2x)+f'(x)}{\{2f(2x)-f(x)\}^3} \text{ であるから，}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{-3f'(0)}{\{f(0)\}^3}=\frac{\mathbf{-19}}{\mathbf{486}}$$

第 4 問

ある試行の結果起こる三つの事象 A と B と C について考える。

事象 $A \cup B \cup C$ は全事象であり，それぞれの確率が

$$P(A) = \frac{5}{8},\ P(B) = \frac{3}{8},\ P(C) = \frac{5}{16}$$

であるとする。さらに，事象 $A \cap B$ と C は互いに排反であり，B が起こったときの A と C のそれぞれが起こる条件つき確率が

$$P_B(A) = \frac{5}{8},\ P_B(C) = \frac{1}{12}$$

であるとする。

(1) 事象 $A \cap B$ の確率は $P(A \cap B) = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ であり，A が起こったときの B の起こる条件つき確率は

$P_A(B) = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2) 事象 $B \cup C$ の確率は $P(B \cup C) = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ であり，$\overline{C}$ が起こったときの B の起こる条件つき確率は

$P_{\overline{C}}(B) = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(3) 事象 $A \cap C$ の確率は $P(A \cap C) = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ であり，C が起こったときの $A \cup B$ の起こる条件つき確率は

$P_C(A \cup B) = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

解答

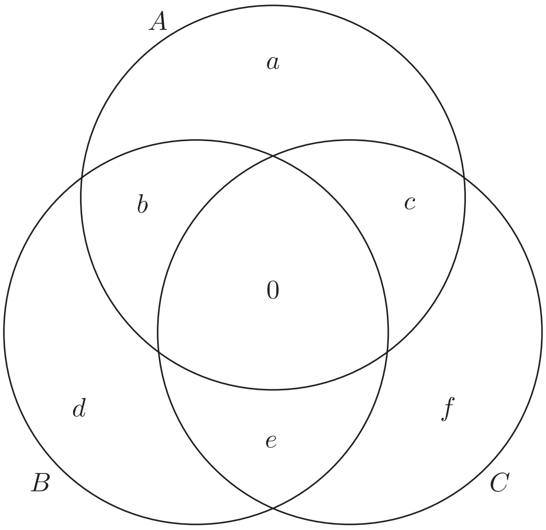
(1) $P(A \cap B) = \dfrac{15}{64}$，$P_A(B) = \dfrac{3}{8}$

(2) $P(B \cup C) = \dfrac{21}{32}$，$P_{\overline{C}}(B) = \dfrac{1}{2}$

(3) $P(A \cap C) = \dfrac{3}{64}$，$P_C(A \cup B) = \dfrac{1}{4}$

解説

条件により $P(A\cup B\cup C)=1,\ P(A\cap B\cap C)=0$ であることに注意しておく。



(1)　$P(A\cap B)=P_B(A)\cdot P(B)=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{3}{8}=\boldsymbol{\dfrac{15}{64}}\ \cdots\ b$

$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{15}{64}}{\frac{5}{8}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(2)　まず，$P(B\cap C)=P_B(C)\cdot P(B)=\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{32}\ \cdots\ e$ が分かるので，

（この時点で $d=P(B)-(b+e)=\frac{7}{64}$ も分かる）

$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{16}-\dfrac{1}{32}=\boldsymbol{\dfrac{21}{32}}\ \cdots\ b+c+d+e+f$

（これにより $a=\frac{11}{32}$ がわかり，$c=P(A)-(a+b)=\frac{3}{64}$ も分かる）

$$P_{\overline{C}}(B)=\frac{P(\overline{C}\cap B)}{P(\overline{C})}=\frac{b+d}{1-P(C)}=\frac{\frac{15}{64}+\frac{7}{64}}{1-\frac{5}{16}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3)　$P(A\cap C)=c=\boldsymbol{\dfrac{3}{64}}$

また，$P_C(A\cup B)=\dfrac{c+e}{P(C)}=\dfrac{\frac{3}{64}+\frac{1}{32}}{\frac{5}{16}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

講評

第 1 問［小問集合］（やや難）(1) は時間をかけずに解きたい。(2)〜(4) は迷ったら，後回しにして第 2 問，第 4 問を優先したい。
第 2 問［接線，体積］（(1) 易 (2),(3) 標準）(2)(3) はすべて回転体の体積に関する標準的な問題である。ここは落とせない。
第 3 問［微積分，逆関数，定義］（ア〜オ標準，カキやや難，ク〜ス難）定積分で表された関数の微分で，逆関数も絡んでくるので慣れていないと難しい。ア〜オを確実に押さえたい。
第 4 問［集合，確率］（(1)(2) やや易 (3) 標準）ベン図を正しく理解できているかを問われた問題。条件付き確率は定義だけ押さえておけば解ける問題だけに確実に処理したい。

昨年度に比べると全体的に易化した。証明 (記述式) もなくなり，すべてマークシート方式となった (大問構成は 4 題で昨年度と変わらず)。第 2 問，第 4 問を確実に押さえ，第 1 問いくつか，第 3 問前半を正解したい。目標は 65%。